Deuxième partie

ALLOCATION DES RESSOURCES DE PRODUCTION DANS L'ENTREPRISE

INTRODUCTION

Analysé du point de vue fonctionnel, un système de production manufacturière est constitué d'un ensemble de ressources dédiées à la production de marchandises. Quelles sont ces ressources? Au niveau stratégique de la gestion d'entreprise, on peut distinguer, comme dans [Gia88] les ressources externes (fournisseurs et sous-traitants) et les ressources internes (équipements, personnel, logistique, finance). La généralisation de certaines formes de sous-traitance, la décentralisation des décisions et l'importance des réseaux d'information rendent cependant plus floue qu'auparavant la frontière d'une entreprise, et ont fait émerger des concepts hybrides, comme celui d'entreprise virtuelle. Au niveau de l'atelier, les ressources sont en général mieux spécifiées, et l'unité géographique du site de production permet souvent de mieux délimiter les frontières du système. Une vision trop locale des ressources productives peut cependant s'avérer moins rentable qu'une prise en compte plus large de l'ensemble des ressources utilisables pour réaliser des objectifs de production.

Le problème d'allocation de ressources intervient à différents niveaux d'analyse et de décision :

- la fabrication sera-t-elle réalisée en interne ou sous-traitée?
- pour une production en interne, quels seront les choix de site, d'usine, d'atelier?
- quels lots de production lancer?
- quelles gammes opératoires choisir?
- pour une opération donnée dans un atelier donné, quel est le meilleur choix de l'opérateur, de la machine, de l'outillage et des constituants secondaires?
- à quelles dates lancer les opérations?

L'allocation des ressources aux opérations et l'affectation des opérations aux ressources sont deux approches concourantes pour aborder le problème de couplage temporel opérations-ressources. Ces deux approches diffèrent par l'accent mis dans la première approche sur une utilisation performante des ressources et dans la seconde sur l'efficacité dans l'exécution des opérations.

Bien qu'essentiel en gestion de production, particulièrement aux stades de l'analyse économique, de la planification et de la conduite, le problème d'allocation des ressources est rarement formulé explicitement. Il est vrai que, pour se combiner efficacement dans le temps, opérations et ressources doivent partager des caractéristiques complémentaires, qui sont souvent spécifiques. Mais pour de nombreux types d'ateliers, comme les ateliers flexibles, les unités robotisées, les structures multi-machines ou multi-ateliers, des choix d'affectation existent et peuvent être évalués par des coûts bien identifiés servant de paramètres qui conditionnent les décisions en temps réel. En outre, eu égard à la complexité des problèmes combinatoire, un avantage procuré par la formulation statique du problème d'affectation opérations-ressources, étudiée au chapitre 1, réside dans la relative simplicité de sa formulation mathématique et de sa résolution. L'approche par optimisation statique permet en outre de traiter le problème de planification des allocations de ressources sur un horizon temporel à moyen terme. Il permet aussi, comme il est montré dans la section 1.5, de résoudre, par une heuristique très simple à implémenter, le problème d'affectation des nouvelles commandes au fur et à mesure de leur arrivée.

Le second chapitre analyse le cas où le couplage entre l'ordonnancement des opérations et l'allocation des ressources est trop fort pour pouvoir traiter les deux problèmes séparément. L'allocation des ressources permettant l'exécution des opérations peut alors être caractérisée par un jeu de contraintes intégré à la formulation des problèmes d'ordonnancement d'opérations. Le modèle décrit au chapitre 2 vise à étendre le problème classique d'ordonnancement à des productions ayant des gammes non-linéaires dont les opérations peuvent nécessiter plusieurs ressources, choisies dans des ensembles admissibles donnés.

Chapitre 1

DE L'ALLOCATION OPTIMALE AUX RÈGLES D'ALLOCATION EN TEMPS RÉEL

1.1 Introduction

Bien que posés à différents niveaux de gestion de l'entreprise, du niveau des décisions stratégiques jusqu'à la conduite en temps réel, les problèmes d'allocation des ressources sont analogues du point de vue de leur représentation mathématique : à chaque opération, il faut associer une ou plusieurs ressources, toute ressource ayant une capacité de traitement supposée connue sur un horizon temporel donné.

Le schéma de couplage temporel opérations-ressources peut être facilement visualisé par un graphe bi-parti opérations-ressources, analogue au graphe représentant un problème de transport :

– un arc ou un faisceau d'arcs part de chaque noeud-opération,

– plusieurs arcs (éventuellement valués) aboutissent à chaque noeud-ressource, la somme des flots sur ces arcs étant soumise à une contrainte de capacité.

Ces représentations graphiques et les formulations mathématiques qui leur sont associées dépendent peu du niveau de détail où se pose le problème. Ce sont plutôt les différentes hypothèses sur la connaissance et la disponibilité des ressources à allouer et des opérations à exécuter qui différencient les modèles des différents problèmes d'allocation de ressources.

La littérature scientifique en recherche opérationnelle rassemble

1. Chapitre rédigé par J.-C. Hennet

de nombreuses études algorithmiques consacrées à la résolution de problèmes d'affectation opérations-ressources, généralement appelés *problèmes d'affectation généralisés* (PAG). Le problème d'affectation de base est en effet un problème de couplage parfait dans un graphe bi-parti : chaque opération nécessite une ressource et chaque ressource exécute une et une seule opération. Dès que le problème d'allocation des ressources est posé dans le contexte temporel d'un horizon de planification, chaque ressource est caractérisée par une capacité de traitement, mesurée par exemple en heures de travail. La machine est alors susceptible d'exécuter plusieurs opérations. Dans le premier chapitre, on ne cherchera pas à fixer le séquencement des opérations au sein des périodes. Seules les contraintes de capacité par période devront être respectées.

Chaque variable de décision prenant l'une des deux seules valeurs possibles : 0 si l'affectation est retenue, 1 si elle ne l'est pas, les problèmes d'affectation opérations-ressources sont des problèmes d'optimisation combinatoire. La méthodologie la plus souvent utilisée pour résoudre ces problèmes est la séparation et l'évaluation progressive (SEP). Cependant, la taille considérable des problèmes d'affectation généralisée couramment rencontrés dans l'industrie incite à privilégier la programmation linéaire en variables continues comme méthode d'optimisation, car elle permet de traiter de très gros problèmes.

Le problème d'allocation des ressources se pose au niveau prévisionnel comme un problème d'optimisation statique. Mais il faut aussi fréquemment remettre en cause les décisions qui en découlent pour tenir compte des événements qui surviennent en temps réel, qu'ils soient conformes aux prévisions : arrivée de pièces, machines se libérant, ou inattendus : commandes imprévues, pannes, retards. Sur des horizons très courts, les principales techniques permettant une prise de décision suffisamment rapide sont les règles de priorité. Se pose alors le problème de cohérence entre la solution du problème d'affectation généralisé, définissant le plan d'allocation des opérations dont l'exécution est prévue, et l'allocation en temps réel de ressources aux opérations exécutables.

Séparément, les problèmes d'affectation généralisés et les problèmes d'allocation par règles de priorité ont été largement étudiés. Mais à notre connaissance, il n'existe pas de schéma d'allocation de ressources assurant la cohérence des méthodes de résolution de ces deux problèmes. C'est à cet objectif que ce chapitre est consacré. Il présente tout d'abord la formulation mathématique du problème d'affectation généralisé. Certains résultats relatifs à ce problème sont ensuite exposés. Ils permettent de construire une méthode de résolution partielle du problème d'allocation de ressources. Les opérations non affectées par la méthode sont ensuite traitées comme de nouvelles opérations arrivant dans le système. Des ressources leur sont allouées selon des règles de priorité construites à partir des variables d'écart du problème global d'allocation de ressources. La solution courante du problème d'affectation généralisé acquiert ainsi un caractère dynamique évolutif, par une mise à jour systématique des capacités résiduelles des ressources.

1.2 Problèmes d'allocation de ressources

Les liens entre le problème de gestion des ressources productives dans l'entreprise et la théorie économique de la production sont difficiles à cerner car les perspectives d'analyse et les objectifs de modélisation sont différents. Toutefois, on peut tenter de comparer les concepts de ressources productives et de facteurs de production.

La théorie économique de la production repose principalement sur l'utilisation des fonctions de production. Pour un produit particulier ou pour un ensemble agrégé de produits, la quantité produite, notée y est une fonction continue, ϕ, dont les variables sont les quantités $v_1, ..., v_n$ des n facteurs de production qui sont les *entrées* (au sens de l'automaticien), ou les composantes de base du système :

$$y = \phi(v_1, ..., v_n). \tag{1.1}$$

La fonction ϕ étant supposée continue et deux fois dérivables par rapport à ses variables v_i, on peut définir la productivité marginale de chaque facteur de production et l'élasticité de substitution entre facteurs de production. En couplant à ce modèle une fonction endogène ou exogène de détermination des prix, on peut optimiser la valeur économique d'une quantité produite par le choix de la meilleure combinaison des facteurs de production [Sam65].

Le problème d'allocation optimale des ressources a lui aussi un caractère statique et vise à l'utilisation optimale des capacités de production. Mais sa différence essentielle avec le modèle par fonctions de production réside dans l'individualisation des ressources, qui leur confère des caractéristiques fixes, de nature discrète. Toute substitution d'une ressource par une autre obéit à des règles logiques et échappe donc au cadre des modèles à états continus. Cette différence essentielle confère au problème statique d'allocation optimale son caractère combinatoire ou en nombres entiers. D'une façon analogue, les modèles dynamiques d'allocation des ressources relèvent généralement de la théorie des systèmes à événements discrets, plutôt que de la théorie des systèmes continus.

1.2.1 Les ressources de production

Au niveau d'une entreprise, les ressources peuvent être des entreprises sous-traitantes, des usines ou des ateliers. Au niveau d'un atelier, les ressources peuvent être les ilots de production, les robots, les différentes machines, les systèmes de manutention et de transport. Pour un système de transport, les ressources peuvent être les emplacements, les palettes,.... La décomposition d'un système en ressources apparait souvent de façon naturelle car elle correspond à une décomposition physique et fonctionnelle. L'acquisition des ressources, le choix de leur localisation et de leur agencement relève généralement du niveau de gestion stratégique de l'entreprise. L'impact économique de ces choix est considérable car ils conditionnent à moyen terme et même à long terme les décisions tactiques de planification de production, les temps de cycle et les coûts de fabrication. Dans ce chapitre, nous supposerons donnés les ressources, leurs capacités et leurs coûts opérationnels. Dans ce cadre, l'objectif sera d'utiliser au mieux les capacités productives de l'entreprise ou de l'atelier.

Analysé dans un cadre logique et intemporel, le problème d'allocation optimale de ressources est un problème d'affectation généralisé (PAG), pouvant être formulé ainsi :

$$\textbf{(PAG)} \qquad \text{Minimiser} \quad \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} c_{ij}x_{ij} \tag{1.2}$$

$$\text{sous} \quad \sum_{i=1}^{I} x_{ij} = 1, \qquad \forall j \in (1,...,J) \tag{1.3}$$

$$\sum_{j=1}^{J} r_{ij}^k x_{ij} \leq S_i^k, \qquad \forall i \in (1,...,I), k \in (1,...,K). \tag{1.4}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \qquad \forall i \in (1,...,I), j \in (1,...,J). \tag{1.5}$$

Les indices $i = 1,...I$ sont associés à des ressources, identiques ou différentes entre elles, mais disponibles en nombre limité.

Les indices $j = 1, ..., J$ correspondent à des opérations à exécuter. Selon la nature plus ou moins agrégée du modèle, ces opérations peuvent représenter un assemblage complexe dans un atelier, le groupement de plusieurs opérations ou une opération élémentaire.

Le coût c_{ij} indique la dépense associée à la réalisation de l'opération j par la ressource i. Habituellement, ce coût combine plusieurs composantes : qualité, durée, transport,... Les cas d'impossibilité sont fréquents, dès que les opérations à exécuter ont des spécificités technologiques. Ils peuvent être par convention représentés par des coûts infinis.

Les variables de ce problème, x_{ij}, sont booléennes. Par définition, pour l'allocation couramment évaluée,

$x(i,j) = 1$ signifie que l'opération j est exécutée par la ressource i,
$x(i,j) = 0$ si l'opération j n'est pas exécutée par la ressource i.

La contrainte (1.3), conjuguée au caractère booléen des variables, signifie que chaque opération doit être exécutée sur une ressource et une seule (c'est à dire, dans le contexte multi-période sur une seule ressource à une seule période).

Les contraintes (1.4) sont celles qui justifient le caractère *généralisé* du problème d'affectation. Dans un problème d'affectation *simple*, les contraintes (1.4) seraient remplacées par :

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ij} \ = 1 \ \forall \ i = 1, ..., I.$$

Ces dernières contraintes ne sont pas réalistes dès que le temps ou les ressources sont agrégées. Une ressource i est alors caractérisée par sa capacité, notée par exemple S_i, et chaque opération j nécessite la quantité de ressource r_{ij}^1 si elle utilise la ressource j. Dans la formulation du problème, l'indice $k \in (1, ..., K)$ traduit l'existence fréquente d'autres contraintes de capacité, généralement liées à l'utilisation de ressources annexes ou complémentaires par rapport aux ressources de base. C'est le cas en particulier lorsque certaines opérations comportent des options nécessitant des matériels, des outils, des composants ou des temps de travail supplémentaires.

1.2.2 L'allocation avec contraintes d'options

Le problème d'affectation optimale qui va maintenant être analysé distingue deux types de contraintes de capacité pour les ressources.

En ce qui concerne les ressources principales, toutes les opérations sont supposées avoir la même consommation unitaire. Mais en outre, des ressources complémentaires sont considérées. Elles peuvent être associées à des options qui différencient les produits. A l'option k est associée la consommation r_{ij}^k de la ressource (i, k) par l'opération j. Le problème d'affectation optimale admet alors la formulation suivante, notée (PAGO).

$$\textbf{(PAGO)} \qquad \text{Minimiser} \quad \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} c_{ij} x_{ij} \tag{1.6}$$

$$\text{sous} \quad \sum_{i=1}^{I} x_{ij} = 1, \qquad \forall j \in (1, ..., J) \tag{1.7}$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{J} x_{ij} \leq S_i, \qquad \forall i \in (1, ..., I) \tag{1.8}$$

$$\sum_{j=1}^{J} r_{ij}^k x_{ij} \leq S_i^k, \qquad \forall i \in (1, ..., I), k \in (1, ..., K) \tag{1.9}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \qquad \forall i \in (1, ..., I), j \in (1, ..., J) \tag{1.10}$$

1.2.3 Le plan d'allocation des ressources

Dans le cadre des structures décisionnelles multiniveaux décrites dans la première partie de l'ouvrage, le plan d'allocation des ressources se situe au niveau tactique du plan directeur ou du plan de production détaillé.

Le plan d'allocation des ressources couvre un horizon temporel constitué d'un nombre N de périodes, la période pouvant être l'heure, le jour, la semaine. Cet horizon est dit *glissant* car, d'une exécution du programme d'optimisation à la suivante, l'horizon est décalé dans le temps, les affectations les plus proches de l'instant courant ne devant plus être mises à jour, et de nouvelles périodes de planification pouvant être prises en compte au fur et à mesure de l'arrivée de nouvelles données. La périodicité ou le déclenchement de la mise à jour de l'horizon est une décision importante pour la mise en oeuvre opérationnelle du plan d'allocation des ressources. La durée de l'horizon est habituellement choisie de l'ordre de grandeur du délai moyen de fabrication. Ainsi, s'il est possible d'exécuter un ordre de fabrication (OF) sur l'horizon considéré, le délai relatif à cet OF sera en moyenne acceptable. La prise en compte de *dates dues* plus ou moins rapprochées selon les OF pourra être traduite en termes de coûts associés non seulement aux moyens de production sélectionnés mais aussi à la période d'utilisation de ces moyens.

Les ressources considérées en planification sont en fait des ressources différentes à chaque période, même si elles représentent les mêmes moyens de production. Par exemple, l'on note i la ressource qui représente l'utilisation de la machine k pendant la période $\theta < N$ de l'horizon de planification, on notera d'un indice différent, i' l'utilisation de la même machine k pendant la période $\theta + 1$. Dans la formulation du problème, les variables k et θ n'apparaissent pas. Elles sont remplacées par la variables i. Si K est le nombre total de moyens de production, le nombre total de variables de ressources à considérer pour le problème de planification des allocations est au plus $K \times N$, certains moyens pouvant ne pas être disponibles à certaines périodes.

Ayant ainsi représenté par des indices i différents les différentes périodes d'utilisation de la même ressource, le problème de planification des allocations se ramène aux formulations précédentes, (PAG) ou (PAGO). Le nombre de variables du problème de planification des allocations sur N périodes est alors au plus multiplié par N par rapport au problème sur une période, et le même facteur multiplicatif s'applique aux contraintes (1.4) et (1.9).

Comme il a été mentionné précédemment, les coûts c_{ij} du problème de planification des allocations combinent les préférences de moyens et de dates, ce qui permet en particulier de traduire l'urgence de certains ordres de fabrication. Ce modèle permet en outre de représenter des capacités de production et des capacités d'options variables dans le temps.

1.3 Techniques de résolution

1.3.1 Le problème d'affectation homogène

Un cas particulier important des contraintes de capacité (1.4) est lorsqu'elles se réduisent à des contraintes de capacité entières pour chaque ressource, toutes les opérations ayant la même consommation de cette ressource, normalisée à 1. Le problème d'affectation généralisée (PAG) se ramène alors à un problème plus simple, le problème d'affectation homogène, noté (PAH). Ce problème décrit le cas $K = 1,\ r_{ij}^1 = 1$. Il correspond en particulier à des lignes de production à cadence fixée, comme par exemple dans les ateliers d'assemblage de véhicules [HRT96]. Les contraintes (1.4) peuvent alors être ré-écrites :

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ij} \ \leq \ S_i, \ \ \forall i \in (1, ..., I). \tag{1.11}$$

Les variables x_{ij} du problème d'affectation homogène (PAH), défini par (1.2),(1.3),(1.11),(1.5), peuvent être écrites sous forme vectorielle. Par exemple, si x_i représente le ième vecteur-ligne de la matrice $((x_{ij}))$, on peut construire le vecteur d'inconnues, de dimension $N = I \times J$:

$$X = \begin{bmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_I^T \end{bmatrix}$$

Le problème d'optimisation peut alors être ré-écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{Minimiser} \quad & C^T X & & & (1.12) \\ \text{sous} \quad & AX & = b & & (1.13) \\ & X_p \ = \ 0 \textbf{ ou } 1, & \forall p \in (1, ..., N). & & (1.14) \end{aligned}$$

La matrice des contraintes (1.3),(1.11) prend la forme :

$$A = \begin{bmatrix} 1_J & 0_J & \dots & 0_J \\ 0_J & 1_J & & 0_J \\ \vdots & & & \vdots \\ 0_J & \dots & 0_J & 1_J \\ I_J & \dots & & I_J \end{bmatrix}. \tag{1.15}$$

La notation 1_J représente ici un vecteur-ligne de dimension J dont toutes les composantes valent 1. La notation I_J représente la matrice unité de dimension $J \times J$.

La matrice A n'est composée que de 0 et de 1. De plus, chacune de ses colonnes a au plus deux éléments non nuls. Cette matrice est donc unimodulaire, car elle satisfait la condition de Ghouila-Houri [NW88]. Cette propriété, conjuguée au fait que le vecteur b n'a que des composantes entières, entraine que la solution du problème (PAH) est *naturellement entière*. Les contraintes (1.14) peuvent donc être relachées et simplement remplacées par les contraintes de non-négativité :

$$X_p \geq 0 \ \ \forall p = 1, ..., N \tag{1.16}$$

car les contraintes (1.3) limitent à 1 la valeur de chaque variable X_p.

Concepts et outils pour les systèmes de production, Cépaduès Editions, 1997, Coordination : JC.Hennet

1.3.2 Relaxation Lagrangienne

Pour retrouver le caractère *naturellement entier* de la solution optimale, qui caractérise le problème (PAH) et en permet une résolution aisée, il est naturel de considérer la relaxation lagrangienne (PAGOLR) du problème (PAGO), obtenue en dualisant les contraintes (1.9), c'est à dire en relachant ces contraintes et en remplaçant le critère (1.6) par l'expression lagrangienne :

$$L = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} \lambda_{ij}^{k}(\sum_{j=1}^{J} r_{ij}^{k}x_{ij} - S_i^k). \qquad (1.17)$$

La relaxation lagrangienne du problème (PAGO) prend alors la même forme que le problème (PAH), avec les paramètres de coûts, $((c_{ij}))$ remplacés par les paramètres $((c'_{ij}))$, définis par :

$$c'_{ij} = c_{ij} + \sum_{k=1}^{K} \lambda_{ij}^{k} r_{ij}^{k}. \qquad (1.18)$$

Le choix des valeurs numériques, nécessairement non-négatives, des variables duales λ_{ij}^k est bien sûr crucial, la solution optimale du problème (PAGO) étant obtenue pour les valeurs optimales de ces variables duales. En pratique, un choix judicieux, au moins pour une initialisation, consiste à choisir les variables duales optimales associées aux contraintes (1.9) dans la relaxation continue, notée (PAGOC) du problème (PAGO), obtenue en remplaçant les contraintes (1.10) par de simples contraintes de non-negativité :

$$x_{ij} \geq 0. \qquad (1.19)$$

Ainsi, la solution du problème (PAGOLR) est booléenne. Il est clair que si toutes les contraintes de capacités par option (1.9) sont respectées par la solution optimale du problème (PAGOLR), cette solution est aussi optimale pour le problème (PAGO). En général, pour des valeurs bien choisies des variables duales λ_{ij}^k, la valeur du critère (1.6) associée à cette solution fournit une borne inférieure de la valeur optimale de ce critère [RS75].

1.3.3 Amélioration de la solution relaxée

Plusieurs techniques ont été proposées pour améliorer la qualité de la borne inférieure obtenue par résolution du problème (PAGOLR).

En particulier, il a été proposé dans [RS75] de minimiser le coût des changements d'affectation d'opérations, qui permettent d'assurer la satisfaction des contraintes (1.9) violées par la solution optimale de (PAGOLR). Soit J_i l'ensemble des opérations j affectées à la ressource i dans la solution optimale de (PAGOLR). Considérons toutes les contraintes d'option (i,k) violées par cette solution, c'est à dire telles que :

$$E_i^k = \sum_{j \in J_i} r_{ij}^k x_{ij} - S_i^k > 0. \qquad (1.20)$$

En définissant les variables auxiliaires :

$$y_{ij} = 1 - x_{ij} \quad \textbf{si } j \in J_i$$

on trouve un minorant du coût minimum permettant d'assurer le respect de toutes les contraintes de capacité associées à la ressource i comme valeur optimale du critère pour le problème dit *de sac à dos* (SD) suivant :

$$\textbf{(SD)} \qquad \text{Minimiser} \qquad \sum_{j \notin J_i} \pi_{ij} y_{ij} \qquad (1.21)$$

$$\text{sous} \quad \textstyle\sum_{j \in J_i} r_{ij}^k y_{ij} \geq E_i^k, \quad \forall k \in K_i. \qquad (1.22)$$

$$y_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \quad \forall i \in (1,...,I), j \in (1,...,J). \qquad (1.23)$$

Les coûts π_{ij} sont les coûts minimaux encourus lorsqu'on resteint les choix d'affectation possibles aux ressources i pour lesquelle $j \notin J_i$.

1.3.4 Résolution partielle du problème d'affectation

Tel qu'il est décrit dans la plupart des travaux sur le problème d'affectation généralisée, le rôle principal des solutions approchées obtenues au paragraphe précédent est de fournir des bornes inférieures pour l'évaluation des branches de solutions couramment sondées dans le cadre d'algorithmes de programmation combinatoire par séparation et évaluation progressive (branch & bound).

Cependant, il est intéressant de remarquer que la procédure de G.T.Ross et R.M. Soland ([RS75]) fournit aussi une solution partielle au problème d'affectation : une affectation partielle respectant toutes les contraintes de capacité est obtenue en imposant:

$$x_{ij} = 0 \ \ \forall j \in J_i; \ y_{ij} = 1, \ \forall i \in (1,...,i). \qquad (1.24)$$

Concepts et outils pour les systèmes de production, Cépaduès Editions, 1997, Coordination : JC.Hennet

Cette affectation partielle est solution d'un problème déduit du problème de base (PAGO), par relaxation de certaines contraintes (1.7). Les opérations pour lesquelles ces contraintes ont de fait été relachées restent non affectées.

Les problèmes d'optimisation des affectations devant être habituellement traités sur des horizons de planification assez longs par rapport à la durée des opérations, ils mettent généralement en jeu beaucoup de variables, ce qui rend difficilement applicables les techniques exactes d'optimisation combinatoire.

L'obtention d'une bonne solution partielle d'affectation, entièrement obtenue par programmation linéaire (résolution du problème (PAGOC) puis du problème (PAGLR)) et par résolution, éventuellement approchée, de petits problèmes dits *de sac à dos*, permet de traiter de façon particulièrement efficace des problèmes de très grande taille (par exemple de l'ordre de 100000 variables x_{ij}).

En outre, le problème posé par les opérations restant non affectées à l'issue de l'étape d'optimisation peut être traité de façon analogue au problème d'allocation dynamique des ressources pour les nouvelles opérations arrivant dans le système et devant être affectées au mieux, sans attendre une nouvelle résolution du problème statique d'optimisation des affectations.

1.4 L 'allocation dynamique

1.4.1 Affectation et séquencement des opérations

Pour optimiser les performances d'un système de production, il est souvent nécessaire de résoudre en temps réel, c'est à dire à chaque arrivée d'un ordre de fabrication ou d'une pièce à usiner, des problèmes d'affectation d'opérations aux ressources.

Dans le cas général où les types d'opérations considérées sont différents, le problème d'affectation opérations-machines se décompose généralement en deux problèmes de décision, schématisés sur la figure 1.1 :

– lorsqu'une ressource se libère, quelle est l'opération suivante qu'elle doit exécuter?

– lorsqu'une nouvelle opération est prête, à quelle ressource doit-elle être affectée?

Concepts et outils pour les systèmes de production, Cépaduès Editions, 1997, Coordination : JC.Hennet

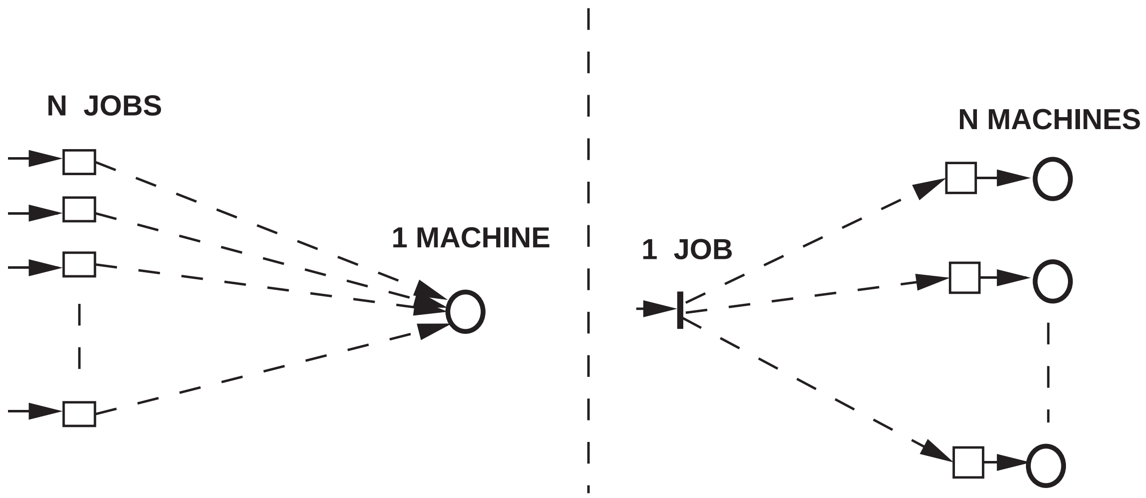

FIG. 1.1 – *Décomposition du problème d'allocation dynamique*

Le premier problème (dit *N jobs 1 machine*), représenté à gauche de la figure 1.1 est celui du séquencement, ou de l'ordonnancement. Son objectif est de définir l'ordre ou les dates d'exécution des opérations sur les différentes machines. La définition de ce problème suppose que les opérations ne sont pas toutes de même type. Aux différents types d'opérations peuvent être associés différents coûts ou/et différents paramètres.

Dans le contexte de programmation logistique des allocations adopté dans ce chapitre, le problème d'ordonnancement des opérations n'est pas traité, car il est confié au niveau local, en charge de l'exploitation opérationnelle des ressources. Cette décomposition des tâches décisionnelles augmente la flexibilité et la réactivité du niveau local, mais elle nécessite de garantir la faisabilité opérationnelle des solutions d'affectation proposées. C'est précisément le rôle des contraintes de capacité principales (1.8) et des capacités liées aux options (1.9) d'assurer cette faisabilité.

Dans le second problème (dit *1 job N machines*), les arrivées sont généralement supposées aléatoires, et les temps d'attente avant traitement sur les différentes ressources possibles dépendent du nombre de jobs ou de pièces en attente et en cours de traitement. Selon le formalisme des réseaux de files d'attente, le problème d'allocation dynamique des ressources peut être représenté comme sur la figure 1.2 [SH92].

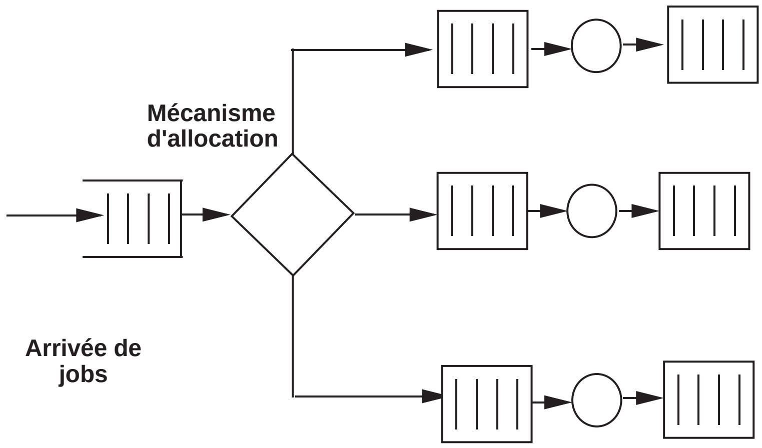

FIG. 1.2 – *Représentation par réseau de files d'attente de l'allocation dynamique*

1.4.2 Quelques règles d'affectation en temps réel

Si l'on connait les caractéristiques stationnaires ou quasi-stationnaires des lois d'arrivées, on peut calculer les taux moyens optimaux d'affectation, de façon exacte ou approximative selon les hypothèses retenues [FDPD88], [SH92], [Hen94].

Deux types de techniques sont alors envisageable pour résoudre le problème d'affectation en temps réel [Hen94] :

- les techniques statiques, basées uniquement sur des règles de priorité ou d'affectation automatique,
- les techniques dynamiques, qui utilisent des informations disponibles sur l'état de chaque ressource, et sur les nombres d'opérations déja en attente ou planifiées sur cette ressource.

En outre, la prise en compte, comme paramètres de référence, des taux moyens optimaux d'affectation, donne naissance à plusieurs algorithmes d'allocation dynamique des ressources, parmi lesquels on peut mentionner les suivants :

- répartition de Bernouilli, affectant les jobs selon un tirage aléatoire respectant en moyenne des taux moyens optimaux d'affectation,
- affectation cyclique, approchant les taux moyens optimaux d'affectation par la répétition périodique de la même séquence d'affectations,
- affectation pseudo-cyclique, réalisant avec une certaine tolérance

les taux moyens optimaux grace à un organe de commande représenté par un réseau de Petri cyclique valué,

– règle de priorité fondée sur la marge entre les taux moyens d'affectation réalisées et les taux moyens optimaux,

– choix de la file d'attente la plus courte (ou du nombre de jobs planifiés le plus petit) avec, dans le cas d'égalité, choix de l'affectation de plus fort taux moyen optimal,

– règle de priorité du type « temps de cycle estimé minimum » avec référence aux paramètres optimaux d'affectation pour lever les indéterminations.

– choix de la marge de capacité maximale, c'est à dire de la ressource pour laquelle la différence entre la capacité de traitement offerte et requise est la plus grande.

1.4.3 La politique dynamique fondée sur les marges de capacité

La dernière des lois mentionnées au paragraphe précédent semble particulièrement bien adaptée au problème d'allocation dynamique, sous les hypothèses du problème (PAGO). A l'issue de l'étape d'optimisation statique, l'information sur les capacités résiduelles en ressources principales et en ressources optionnelles sur chaque période est disponible sous la forme des variables d'écart. Soit $(\hat{x}_{ij})$ la solution courante du problème d'allocation des ressources. Les variables d'écart associées aux contraintes (1.8) et (1.9) sont définies ainsi :

$$s_i = S_i - \sum_{j=1}^{J} \hat{x}_{ij} \text{ pour } i \in (1, ..., I) \tag{1.25}$$

$$s_i^k = S_i^k - \sum_{j=1}^{J} r_{ij}^k \hat{x}_{ij} \text{ pour } i \in (1, ..., I), k \in (1, ..., K). \tag{1.26}$$

Ces variables d'écart représentent les marges de capacité couramment disponibles sur les différentes ressources, principales et optionnelles. Individuellement et sans remettre en cause aucune affectation précédente, l'affectation optimale de la nouvelle opération peut être obtenue par résolution du problème d'affectation généralisée en temps réel (PAGTR) suivant :

$$\textbf{(PAGTR)} \qquad \text{Minimiser} \quad \sum_{i=1}^{I} c_{iy} x_{iy} \tag{1.27}$$

$$\text{sous} \quad \sum_{i=1}^{I} x_{iy} = 1, \tag{1.28}$$

$$x_{iy} \leq s_i, \qquad \forall i \in (1, ..., I) \tag{1.29}$$

$$r_{iy}^k x_{iy} \leq s_i^k, \qquad \forall i \in (1, ..., I), k \in (1, ..., K), \tag{1.30}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \quad \forall i \in (1, ..., I), j \in (1, ..., J). \tag{1.31}$$

Formellement, le problème (PAGTR) ressemble au problème (PAGO), et il est en parfaite cohérence avec lui, à travers les relations (1.25), (1.26), mais sa résolution est beaucoup plus simple car il n'y a qu'une seule opération à affecter. Ce problème peut être très facilement résolu par inspection. L'algorithme de résolution prend la forme de la règle d'affectation en temps réel suivante :

Étape 1
Les affectations possibles (i,y) sont ordonnées dans l'ordre croissant de leurs coûts c_{iy}.
Étape 2
Si la liste d'affectations possibles est vide, STOP. L'pération reste non affectée. Si la liste n'est pas vide, l'affectation de coût le plus faible est sélectionnée.
Étape 3
Les contraintes de capacité (1.29), (1.30) sont testées pour l'affectation couramment sélectionnée. Si toutes les contraintes sont satisfaites, STOP. L'affectation courante est optimale pour le problème (PAGTR). Si l'une au moins des contraintes (1.29), (1.30) n'est pas satisfaite par l'affectation couramment sélectionnée, cette possibilité d'affectation est supprimée et l'on retourne à l'étape 2.

Si l'application de cette règle conduit à la sélection de l'affectation (i^*, y), les variables d'écart s_{i^*} et $s_{i^*}^k$ sont mises à jour par :

$$\begin{cases} s_{i^*} & \longleftarrow & s_{i^*} - 1 \\ s_{i^*}^k & \longleftarrow & s_{i^*}^k - 1 \end{cases}.$$

Si cette règle ne permet pas de trouver une affectation admissible pour l'opération y, alors l'exécution de cette opération est repoussée après la fin de la période de planification considérée. Les opérations non affectées s'accumulent ainsi, et les données qui leur sont afférentes fournissent les entrées du problème d'affectation statique suivant, obtenu en faisant *glisser* l'horizon.

1.5 Exemple d'application

L'exemple d'affectation de commandes d'automobiles à différentes usines d'assemblage admet tout à fait les formulations mathématique du problème d'affectation qui viennent d'être décrites, tant du point de vue statique que dynamique.

En outre, cet exemple illustre bien la possibilité de mise en oeuvre des méthodes proposées dans ce chapitre sous la forme d'une structure distribuée du type *multi-agents*. Cette structure permet de combiner d'une part l'organisation détaillée du travail au sein de chaque usine d'assemblage, d'autre part la possibilité de réponses en temps réel aux nouvelles commandes émanant des agents commerciaux et des détaillants. L'architecture de traitement informatique et de communication proposée pour cet exemple est centrée sur une base de données d'affectation à accès distribué [HRT96].

À chaque véhicule est associée une opération globale (son assemblage), devant prendre en compte ses spécificités (caractéristiques et options). Les coûts des affectations possibles sont constitués principalement des coûts de transport, des coûts de stockage en cas de production en avance, et des coûts associés aux délais de livraison. La cadence de production de chaque usine est imposée pour chaque jour de l'horizon de planification, qui est de l'ordre de plusieurs semaines. Ces cadences déterminent les capacités journalières dans chaque usine, S_i, et les options critiques, comme les ABS, les toits ouvrants, l'air conditionné, ..., font l'objet de contraintes de capacité spécifiques (1.30).

Les valeurs courantes des capacités résiduelles peuvent être consultées et mises à jour en permanence par les détaillants. L'architecture d'un tel système d'information et de réservation est décrit sur la figure 1.3.

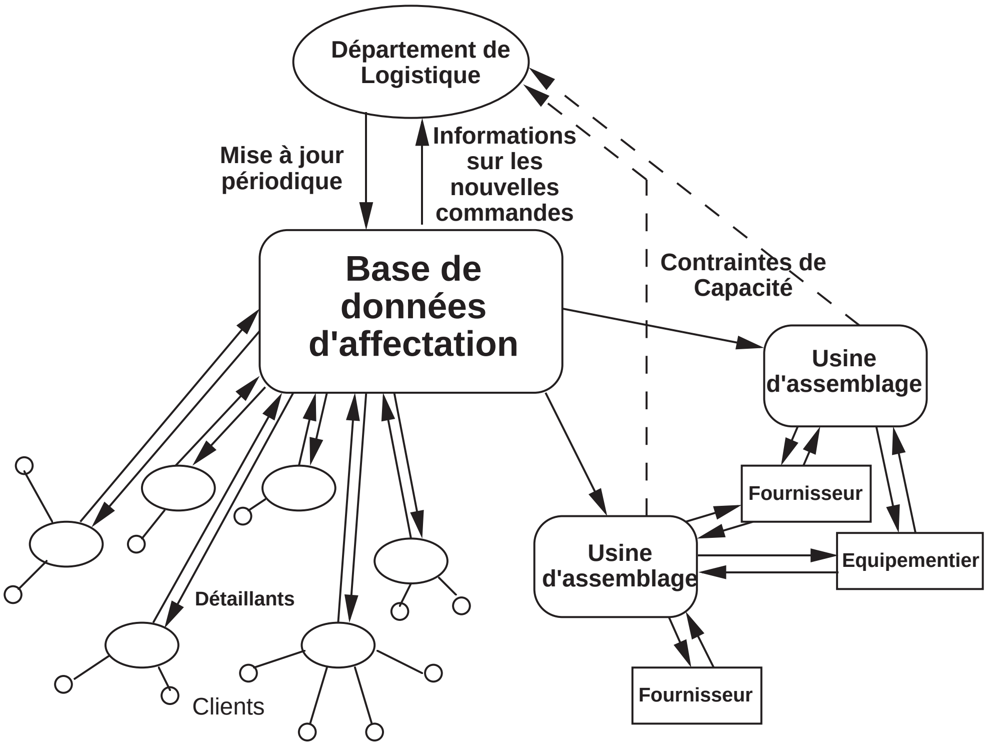

FIG. 1.3 – *Le réseau d'affectation des commandes*