

# Modélisation géométrique

Introduction - Tronc Commun

Marc DANIEL

Master SIS

Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Luminy,  
Campus de Luminy, case 925, 13288 Marseille cedex 9  
Marc.Daniel@univmed.fr

Septembre 2009

Master SIS, Modélisation Géométrique 1

## Plan

### Première partie : Introduction à la Modélisation Géométrique

- « Définition »
- Un peu d'histoire
- CAO (en tant que cas particulier)
- La place et le rôle du modèle
- Qualité et complexité

### Deuxième partie : Rappels et Compléments de Géométrie

- Enveloppe convexe
- Barycentre, fonctions de poids
- Coordonnées homogènes
- Transformations géométriques et invariance : Rotations, Translations, Projections
- Géométrie des courbes
- Géométrie des surfaces

Master SIS, Modélisation Géométrique 2

## Plan (suite)

### Troisième partie : Modélisation de Courbes et Surfaces

- Représentations cartésienne - paramétrique
- Un peu d'histoire
- Outils de base
  - Représentation paramétrique
  - Courbes de Bézier
  - Surfaces sous forme produit tensoriel
  - Modélisation de volumes
  - Modèles implicites
- Limitations de la forme produit tensoriel

Master SIS, Modélisation Géométrique 3

## Plan (suite)

### Quatrième partie : Modélisation de solides - Modélisation volumique

- Propriétés topologiques pour la modélisation de solides
- Modélisation volumique B-Rep
- Modélisation volumique constructive ou CSG

### Cinquième partie : Différentes Approches de la Modélisation Géométrique

- Modélisation paramétrique
- Modélisation variationnelle
- Modélisation par entités ou « features »
- Modélisation déclarative
- Matrices d'énumération spatiale
- Quadtree – Octree

### Sixième partie : Surfaces de subdivision

Master SIS, Modélisation Géométrique 4

# Première partie Introduction à la Modélisation Géométrique

Master SIS, Modélisation Géométrique 5

## Que disent les dictionnaires ?

<http://www.dictionnaire.com/hachette/>

- **modéliser v. tr.** : Établir le modèle ou la description simplifiée d'un phénomène, d'un processus ou d'un système, en vue d'en étudier le fonctionnement par simulation
- **modèle n. m.** : Représentation, physique ou graphique, mais plus généralement mathématique, des relations qui existent réellement ou qui, par hypothèse, semblent exister entre des phénomènes ou entre les différents éléments d'un système, en vue d'études analytiques ou expérimentales (simulations) ....

Master SIS, Modélisation Géométrique 6

« Que disent les dictionnaires ? »

- **Modélisation n. f.** : Description dans un langage compréhensible par l'ordinateur de la forme, du mouvement et des caractéristiques d'un objet ou d'un ensemble d'objets qui crée un modèle. Note(s) : La modélisation permet la construction, entre autres, du modèle 2D et du modèle 3D. Une modélisation comprend une partie appelée *modélisation géométrique* et une partie appelée *modélisation fonctionnelle*. Il existe différents types de modélisation : modélisation par points, modélisation par sections, modélisation par révolution, modélisation par surfaces réglées, modélisation par balayage, modélisation par carroyage, modélisation par pôles.

Master SIS, Modélisation Géométrique 7

« Définition »

**La modélisation géométrique nous entoure au quotidien (1/3)**

- **La CFAO (Conception et Fabrication Assistée par Ordinateur)**
  - automobile
  - aéronautique
  - construction navale
  - sport
  - habillement
  - ...
- **Le milieu médical**
  - modélisation d'organe
  - simulation fonctionnelle, opératoire
  - chirurgie assistée
  - ...

Master SIS, Modélisation Géométrique 8

« Définition »

**La modélisation géométrique nous entoure au quotidien (2/3)**

- **De la simulation à la réalité virtuelle**
  - robotique
  - les simulateurs
  - les mondes virtuels
  - ...
- **Le monde du jeu**
  - actuellement simplifié, mais exigences croissantes
    - qualité, performances
- **Le calcul et la visualisation scientifique**

Souvent des approximations par des facettes planes

Master SIS, Modélisation Géométrique 9

« Définition »

**La modélisation géométrique nous entoure au quotidien (3/3)**

- **L'internet et ses applications graphiques**
- **La télévision**
- **Le cinéma**

**La modélisation géométrique n'a de sens qu'avec une utilisation informatique.**

Master SIS, Modélisation Géométrique 10

« Définition »

**Les objectifs :**

- Concevoir
- Fabriquer
- Calculer
- Simuler
- Visualiser
- Manipuler

**Avec comme contraintes**

- mieux
- plus vite
- savoir traiter des problèmes de plus en plus complexes
  
- qualité - efficacité - rentabilité

Master SIS, Modélisation Géométrique 11

« Définition »

**Cela conduit à**

- **Supprimer les informations papier**
  - esquisses
  - plans classiques
  - documents divers
- **Diminuer le rôle du modèle réduit (argile, bois, plâtre)**
  - augmenter au maximum la part de simulation virtuelle
  - mais pas supprimer le modèle réel : indispensable à ce jour
- **L'expérimentation n'est pas encore morte**
  - calibrage et contrôle indispensables
  - aspect psychologique

Master SIS, Modélisation Géométrique 12

« Définition »

La modélisation géométrique est l'ensemble

- Des outils mathématiques
- Des outils numériques
- Des outils informatiques

qui combinés

- permettent de construire un modèle virtuel (ou modèle informatique) d'un objet réel
  - plus ou moins complexe
  - plus ou moins schématisé
- L'objet peut
  - être le fruit de l'imagination, d'une tendance, ...
  - une solution plus ou moins exacte d'un problème physique donné
  - une combinaison des deux

Master SIS, Modélisation Géométrique 13

« Définition »

La modélisation géométrique implique

- La construction de formes élémentaires
- L'assemblage de formes élémentaires
  - pour créer des objets de plus en plus complexes
- Des manipulations géométriques pour représenter, modifier, analyser
  - processus « élémentaires » (transformations géométriques, calcul, ...)
    - manipulations « élémentaires » mais délicates et lourdes de conséquences
  - processus complexes (intersections d'objets)
  - processus spécifiques (objets décalés (fabrication), raccordements et congés)
  - ...

Master SIS, Modélisation Géométrique 14

« Définition »

La modélisation géométrique implique aussi de savoir reconstruire des objets à partir de numérisation d'objets

- « Anciens » existant sans modèle
  - ajout dans une base de données
  - points de départ de modélisation par reproduction
  - cas particulier du domaine médical
- Modélisés et fabriqués
  - contrôle de l'écart modèle virtuel - modèle du produit fabriqué
- On parle
  - d'ingénierie inverse (reverse engineering)
  - de reconstruction
- Nombre important de données pas toujours structurées

Master SIS, Modélisation Géométrique 15

Un peu d'histoire

Evolution simultanée et conditionnée par l'évolution de l'informatique

- puissance
- simplicité et efficacité
- outils de tracé et de désignation
- diffusion (« démocratisation »)

du graphique :

- modèle fil de fer, élimination des parties cachées, rendu réaliste, texture, ombrage

des moyens de fabrication :

- première séquence automatisée pour piloter une machine outil
- machines CN performantes
  - jusqu'à 5 axes
  - usinage de pièces de plusieurs mètres
- cellules flexibles, postes ou ateliers robotisés

Master SIS, Modélisation Géométrique 16

Un peu d'histoire

D'où

- Le DAO (2D, 2.5D, voire 3D)
- La modélisation surfacique
  - la CAO du début (opposé à tard au DAO pour la notion de 3D) (CAD en anglais)
- La FAO (CAM en anglais)
- La modélisation volumique
- La CFAO (CAD/CAM)
- La conception intégrée - la modélisation produit

Master SIS, Modélisation Géométrique 17

Un peu d'histoire

Les débuts - les grands noms

- Modélisation surfacique (années 60-70)

- De Casteljaou (Citroën)
- Bézier (Renault)
- Coons (General Motors)
- Ferguson (Boeing)

Idée : contrôler les formes à partir de grandeurs géométriques simples (par opposition à certaines équations algébriques ou implicites)

- Modélisation volumique (début des années 80)

- Réquicha
- Mäntylä
- Hoffmann

- Les grands systèmes de CFAO (années 80)

- Euclid
- Catia, ...

- La « démocratisation » (années 90-95)

Master SIS, Modélisation Géométrique 18

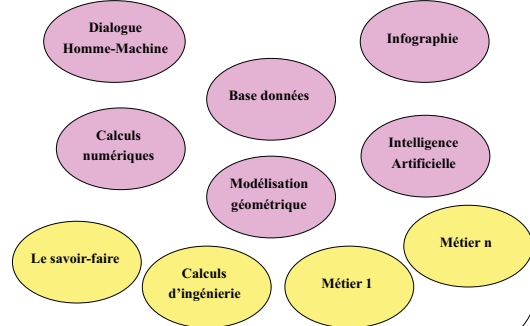
La CAO

- **Définition 1 :** *Tout processus informatisé permettant de résoudre un problème technique : conception d'une solution*
- **Définition 2 :** *Ensemble des aides informatiques depuis l'élaboration du cahier des charges jusqu'à l'établissement des documents nécessaires à la fabrication*

Master SIS, Modélisation Géométrique 19

La CAO

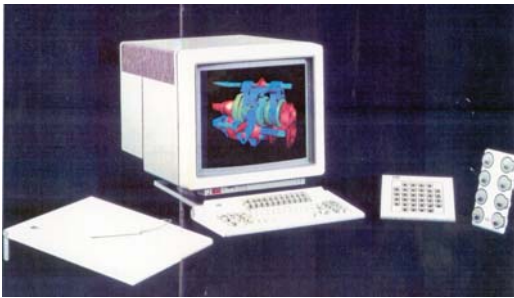
- **Difficile d'en parler !**



Master SIS, Modélisation Géométrique 20

CAO : Le poste de travail

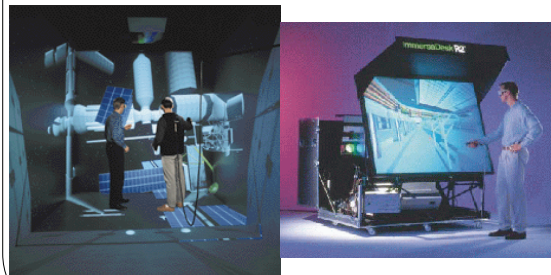
- **Un poste de CAO « actuel »**



Master SIS, Modélisation Géométrique 21

CAO : Le poste de travail

- **Et son environnement du « futur »**



Master SIS, Modélisation Géométrique 22

CAO : Le poste de travail

- **1 ordinateur et une bonne carte graphique**
- **1 ou plusieurs périphériques d'entrée**
  - Souris
  - Tablette ou table à numériser (jusqu'à A0)
  - Potentiomètre(s), boîtes de boutons de sélection
  - Trackball, ...
- **1 ou plusieurs périphériques de sortie**
  - Imprimante
  - Traceur (jusqu'à plusieurs mètres)
- **Les périphériques de la Réalité Virtuelle**
- **1 difficulté majeure :**
  - Visualiser du 3D en 2D
  - Saisir du 3D en 2D



Master SIS, Modélisation Géométrique 23

Place et rôle du modèle

- **Question fondamentale sous-jacente :**

**Modèle X de Y pour Z**

Quel ?

Quoi ?

Pourquoi ?

Master SIS, Modélisation Géométrique 24

**Place et rôle du modèle**

- **On peut avoir un modèle final obtenu par un processus de construction ou un modèle historique qui garde le processus de conception ?**
- **Faut-il garder le processus de conception ?**
  - Pour des modifications
  - Pour remettre en cause
- **Est-ce toujours possible ?**
  - Perte d'information sur certaines opérations ?
    - Ex : les congés de raccordement

Master SIS, Modélisation Géométrique 25

**Place et rôle du modèle**

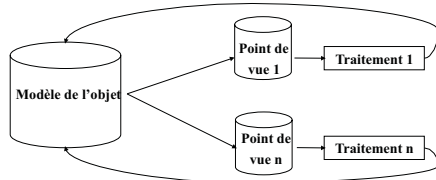
- Un modèle - des modèles ?**
- **Avec un modèle par point de vue**
    - Incohérence rapide au niveau de la géométrie
  - **Le modèle géométrique est-il un modèle d'application ?**
    - comme un modèle de calcul,
    - comme un modèle d'usinage,
    - comme un modèle de visualisation.
  - **Ou une structure centrale ?**
  - **La géométrie est fédératrice**
    - même s'il ne s'agit pas toujours de la même géométrie.
  - **La géométrie apparaît quasiment dans tous les points de vue.**

Master SIS, Modélisation Géométrique 26

**Place et rôle du modèle**

**Le modèle géométrique est au cœur du modèle de l'objet**

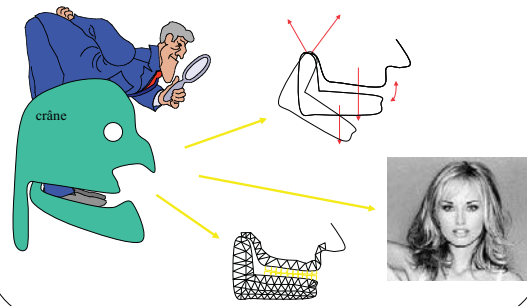
- **N'est pas le modèle de l'objet,**
- **Doit permettre des points de vue adaptés**
  - pour les différents acteurs agissant sur l'objet
  - en gardant la cohérence
- **Doit pouvoir intégrer les actions des acteurs sur les différentes vues**



Master SIS, Modélisation Géométrique 27

**Place et rôle du modèle**

- **“Un problème” de chirurgie plastique**



Master SIS, Modélisation Géométrique 28

**Place et rôle du modèle**

- **Le plan « d'antan » contenait beaucoup d'autres informations que la géométrie**
  - Épaisseur des traits
  - Cotation
  - Texte
  - Cartouche
  - ...
- **Tendance actuelle :**
  - Essayer de retrouver cette richesse
  - Introduire de la sémantique dans le modèle
    - Features ou entités
    - Modélisation déclarative
- **Apport essentiel d'XML**

Master SIS, Modélisation Géométrique 29

**Place et rôle du modèle**

**Modèle nécessairement complexe**

- **Le modèle doit intégrer**
  - des concepts de plus en plus haut niveau
    - pour sa création
    - pour sa manipulation
  - des informations non géométriques, mais matérielles
  - des informations immatérielles
    - savoir-faire
    - raisonnement
    - connaissance
- **Beaucoup de travaux à venir dans ce domaine !!!**

Master SIS, Modélisation Géométrique 30

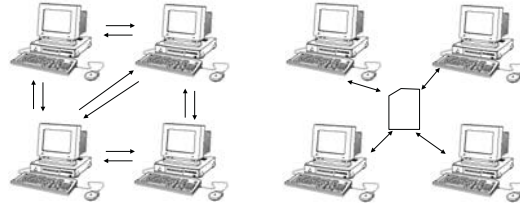
#### La normalisation

- **Normalisation**
  - Interne, régionale, professionnelle, internationale
  - AFNOR
  - ANSI
  - ISO
- **Unification des paramètres**
  - Simplification
  - Diminution des coûts
  - Valorisation par rapport aux clients
  - Sécurisation (interne et externe)
  - Facilité des échanges (clients, sous-traitants)
- **Capitalisation du savoir**

Master SIS, Modélisation Géométrique 31

#### La normalisation

- **Intérêt d'un format neutre pour les échanges**



Master SIS, Modélisation Géométrique 32

#### La normalisation

- **Un vrai besoin d'échange entre systèmes**
- **En 1980 création de la version 1 d'IGES**
  - Initial Graphics Exchange Specification
  - Géométrie, données graphiques, annotations
  - Norme ANSI en 1981
- **IGES est un format d'échange de modèles 2 ou 3D (version 6)**
  - Format ASCII de plus en plus riche
- **Certains formats propriétaires s'imposent de fait**
  - DFX avec Autocad

Master SIS, Modélisation Géométrique 33

#### La normalisation

- **STEP Standard for the Exchange of Product Model Data, norme ISO (ISO 10303)**
  - comment représenter et échanger les informations entre les modèles numériques.
- **Doit permettre de couvrir tout le cycle de vie du produit**
- **Norme « multi-parties », extensible**
- **Projet excessivement ambitieux (déjà une dizaine d'années)**
  - Les parties de bases sont terminées
  - Nombreuses AP à faire (Application Parts)
- **Langage de description permettant de décrire n'importe quelle information d'ingénierie : EXPRESS**

Master SIS, Modélisation Géométrique 34

## Deuxième partie Rappels et Compléments de Géométrie

Master SIS, Modélisation Géométrique 35

## Deuxième partie : Enveloppe convexe, barycentre, fonctions de poids

Master SIS, Modélisation Géométrique 36

**Enveloppe convexe**

- **Polygone convexe :**  
Un polygone est convexe si toute droite le coupe en au plus deux points (exceptés les supports des côtés !)

0 point  
1 point  
2 points

Master SIS, Modélisation Géométrique 37

**Enveloppe convexe**

- Un polygone qui n'est pas convexe est non convexe :

4 points

- Il peut ne pas être simple en étant croisé :

Master SIS, Modélisation Géométrique 38

**Enveloppe convexe**

- Un cas intéressant : le polygone étoilé par rapport à un point toute demi-droite issue de ce point coupe une seule fois le polygone
- existence d'une zone d'étoilement

non !  
oui !

- Utilisé dans les problèmes de triangulation
- Tout polygone convexe est étoilé par rapport à tout point de son intérieur

Master SIS, Modélisation Géométrique 39

**Enveloppe convexe**

**Enveloppe convexe d'un ensemble de points :**

- C'est le plus petit polygone convexe incluant tous les points
- c'est l'enveloppe de l'ensemble des segments joignant tous les points deux à deux

- La frontière ne passe par nécessairement par tous les points
- Techniques de construction et de manipulation : géométrie algorithmique

Master SIS, Modélisation Géométrique 40

**Barycentre**

- Soit O une origine, (n+1) points  $P_i$  affectés des masses  $m_i$
- Le barycentre des points  $P_i$  affectés des masses  $m_i$  est le point G défini par :

$$\left(\sum_{i=0}^n m_i\right) \overrightarrow{OG} = \sum_{i=0}^n m_i \overrightarrow{OP_i}$$

- on a aussi :  $\sum_{i=0}^n m_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$
- notion d'« équivalent » de points

**Rem :** abus d'écriture

$$\left(\sum_{i=0}^n m_i\right) G = \sum_{i=0}^n m_i P_i$$

somme des masses non nulle

Master SIS, Modélisation Géométrique 41

**Barycentre**

- **Propriété fondamentale 1 :**
- Si la masse est nulle le point ne compte pas
- Si la masse est positive, plus celle-ci augmente, plus G est attiré par ce point
- Si la masse est négative, plus celle-ci augmente (en valeur absolue), plus G est repoussé par ce point

- **Propriété fondamentale 2 :**
- Si  $\forall i m_i \geq 0$ , (hypothèse systématique), le barycentre des points  $P_i$  affectés des masses  $m_i$  est dans l'enveloppe convexe des points  $P_i$

Démonstration évidente par récurrence à partir de 2 points (forme  $m_0 P_0 + m_1 P_1$ )

Master SIS, Modélisation Géométrique 42

**Fonctions de poids**

- **Des fonctions de poids permettent d'associer un ensemble de masse à un ensemble de points**
- **Fonctions d'un même paramètre t**
  - (n+1) fonctions pour (n+1) points
  - fonctions positives
  - même domaine de définition (par défaut [0,1])
  - un ensemble de masse pour chaque valeur de t

- **On définit ainsi une courbe C**

$$\left(\sum_{i=0}^n \varphi_i(t)\right) C(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P_i \quad \forall t$$

**Fonctions de poids**

- **Propriété supplémentaire**  
**Propriété de Cauchy ou dite de partition de l'unité**

$$\sum_{i=0}^n \varphi_i \equiv 1 \quad \text{ou} \quad \forall t \quad \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) = 1$$

Chaque point C(t) est le barycentre des points P<sub>i</sub> affectés des masses  $\varphi_i(t)$

$$C(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P_i \quad \forall t \quad \text{Revient à être écrit pour chaque coordonnée}$$

C'est la base de la modélisation de courbes et surfaces

**Deuxième partie :  
Coordonnées homogènes**

**Coordonnées homogènes**

- **Idee travailler dans un espace de dimension (n+1)**
  - appelé espace projectif
- **pour représenter un espace affine euclidien de dimension n**
- **La dernière coordonnée s'appelle**
  - coordonnée d'homogénéisation
  - le poids
- **n=2 ou n=3**
- **coordonnées cartésiennes → coordonnées homogènes**

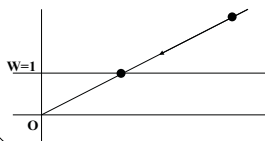
A  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  on associe  $\begin{pmatrix} vx \\ vy \\ vz \\ v \end{pmatrix}$  avec  $v \neq 0$  **Association non unique**

**Coordonnées homogènes**

- **coordonnées homogènes → coordonnées cartésiennes**

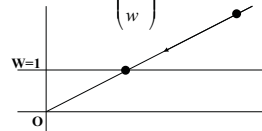
A  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$  on associe  $\begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \end{pmatrix}$  si  $w \neq 0$  **Association unique**

- **Correspond à la projection perspective de E<sub>n+1</sub> → E<sub>n</sub> de centre l'origine et sur l'hyperplan w=1**



**Coordonnées homogènes**

Tous les points  $\begin{pmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{pmatrix}$  se projettent  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  si  $w \neq 0$  **Points équivalents**



- **Si w=0, on a un point à l'infini ou une direction**
  - premier intérêt des coordonnées homogènes
- **Projection à la base des courbes et surfaces rationnelles**



**Coordonnées homogènes**

• **Deuxième intérêt des coordonnées homogènes**

– représenter les transformations géométriques affines par des matrices

– une transformation affine est une transformation affine dans l'espace euclidien

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \quad i = 1, \dots, n$$

déformation possible de l'objet. ex : le cercle de coordonnées  $x^2+y^2 = 1$  est transformé en une ellipse par la transformation de matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$   $b_1=b_2=0$

– une transformation projective est une transformation linéaire dans l'espace projectif

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j \quad i = 1, \dots, n+1$$

**Coordonnées homogènes**

• **Translation**

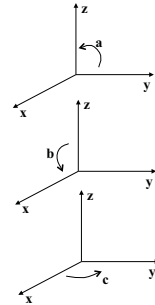
$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• **Rotations**

$$M_{R_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R_y} = \begin{pmatrix} \cos b & 0 & \sin b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin b & 0 & \cos b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R_z} = \begin{pmatrix} \cos c & -\sin c & 0 & 0 \\ \sin c & \cos c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



**Coordonnées homogènes**

• **Transformation d'échelle**

– avec ou sans déformation

$$M_E = \begin{pmatrix} e_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– si  $e_x = e_y = e_z = k$  : homothétie de rapport k

• **Rotation quelconque autour d'une droite : se ramène à une composition de rotations autour des 3 axes (attention !) + translations éventuelles**

- ramener la droite à l'origine
- ramener la droite sur un des axes

**Coordonnées homogènes**

• **La suite des transformations géométriques se résume à un produit non commutatif de matrices**

- pratique, mais vraiment peu performant (beaucoup de calculs inutiles)
- parfois remplacé par des calculs spécifiques optimisés
- la vision dans l'espace n'a rien d'évident.
- les transformations géométriques sont difficiles à appréhender

• **Attention :**

- l'addition de deux matrices n'a aucun sens ici
- la multiplication par un scalaire non plus
- à cause de la coordonnée d'homogénéisation qui doit être traitée différemment

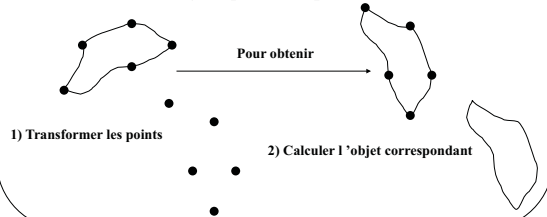
**Deuxième partie :**

**Transformations géométriques et invariance : Rotations, Translations, Projections**

**Invariance**

Un objet défini par des points (coefficients) est **invariant par transformation géométrique** si pour obtenir l'objet après transformation il suffit :

- d'effectuer la transformation géométrique sur les points (coefficients) de définition
- de construire l'objet à partir des points transformés



**Invariance**

**Propriété fondamentale** en modélisation géométrique :

- Transformation géométrique fiable pour tout point de l'objet
- Très rapidement réalisée (sur les données définissant l'objet)
- Obtention d'un vrai modèle de l'objet transformé

**Dépend** évidemment :

- du modèle de l'objet
- de la transformation géométrique

**Invariance par rotation**

Soit une courbe définie par :  $C(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P_i \quad \forall t \quad (1)$

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P x_i \\ y(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P y_i \\ z(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P z_i \end{cases} \quad \forall t$$

- Une rotation s'exprime par une transformation linéaire

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \quad i = 1, \dots, 3$$

- La linéarité rend l'invariance par rotation évidente
- Elle s'applique à tous les objets modélisés sur le principe (1)
  - toutes les courbes à pôles en CAO
  - toutes les surfaces à pôles en CAO

**Invariance par rotation**

Un exemple en 2D !

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P x_i \\ y(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P y_i \end{cases} \quad \forall t$$

- Une rotation :  $\begin{cases} x' = \cos \theta x - \sin \theta y \\ y' = \sin \theta x + \cos \theta y \end{cases}$

$$\begin{cases} x'(t) = \cos \theta \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P x_i - \sin \theta \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P y_i \\ y'(t) = \sin \theta \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P x_i + \cos \theta \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P y_i \end{cases} \quad \forall t$$

$$\begin{cases} x'(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) (\cos \theta P x_i - \sin \theta P y_i) \\ y'(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) (\sin \theta P x_i + \cos \theta P y_i) \end{cases} \quad \forall t$$

$$\begin{cases} x'(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P x'_i \\ y'(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P y'_i \end{cases} \quad \forall t$$

cqfd

**Invariance par translation**

Soit une courbe définie par :  $C(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P_i \quad \forall t \quad (1)$

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P x_i \\ y(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P y_i \\ z(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P z_i \end{cases} \quad \forall t$$

- Une translation s'exprime par une transformation affine

$$x'_i = x_i + t r_i \quad i = 1, \dots, 3$$

- Il apparaît immédiatement les termes  $t r_i$  et  $\sum_{j=0}^n \varphi_j(t) t r_j \quad i = 1, \dots, 3$

- L'invariance par translation est obtenue pour tous les objets modélisés sur le principe (1) si les fonctions de poids vérifient la **partition de l'unité**

**Invariance par transformation affine**

Soit une courbe définie par :  $C(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P_i \quad \forall t \quad (1)$

**Tous les objets modélisés sur le principe (1)**

- toutes les courbes à pôles en CAO
- toutes les surfaces à pôles en CAO

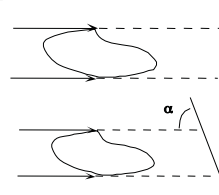
sont invariants par transformation affine si les fonctions de poids considérées vérifient la propriété de **partition de l'unité**

- **Résultat fondamental** en modélisation géométrique

**Projections**

- Représentation dans un espace de dimension (n-1) d'un objet d'un espace de dimension n (en général n=2 ou 3)

- Projection de type dessin industriel : parallèles ou cylindriques  
point de vue à l'infini (optique)  $\Rightarrow$  tous les rayons sont parallèles



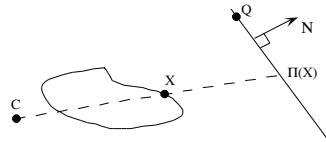
Projection orthogonale au point de vue :  
projection axonométrique

Projection inclinée par rapport au  
point de vue  
cas classique  $\alpha = 45^\circ$

**Projections**

• **Projection « réalistes » : perspectives ou coniques**  
cas général :

- un point de vue (centre de projection)
- un plan de projection



• Origine  $\vec{O}\Pi(X) = (1-t)\vec{O}X + t\vec{O}C$   
et  $\vec{O}\Pi(X) \cdot \vec{N} = 0$   
Une équation en t à une inconnue

**Projections**

• **D'un point de vue matriciel : les projections s'expriment en coordonnées homogènes en faisant intervenir la coordonnée d'homogénéisation**

- Il s'agit de transformations projectives !
- Attention les matrices associées ne sont pas inversibles
  - une fois projeté, on ne peut plus revenir en arrière
  - il faut plus d'une vue pour reconstruire un objet projeté

• **Récapitulatif**

$A(3,3)$	$B(3,1)$	B : marque des translations C : marque des transformations perspectives
$C(1,3)$	$D(1,1)$	

**Invariance par projection**

• **Projection parallèle (traité sur une courbe plane)**

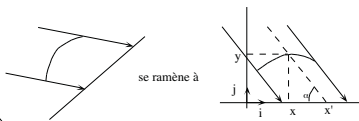
1) Projection axonométrique

Translation et rotations éventuelles



2) Projection oblique

$x' = x + y / \tan \alpha$  ( $y / (x' - x) = \tan \alpha$ )



**Invariance par projection**

Soit une courbe définie par :  $C(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P_i \quad \forall t \quad (1)$

**Tous les objets modélisés sur le principe (1)**

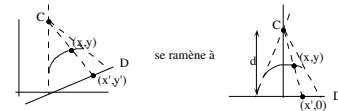
- toutes les courbes à pôles en CAO
- toutes les surfaces à pôles en CAO

sont invariants par projection parallèle

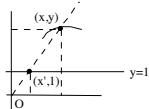
**Invariance par projection**

• **Projection perspective (traité sur une courbe plane)**

Translation et rotations éventuelles



plus simplement : soit la projection perspective



$C(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P_i \quad \forall t$

Un point de la courbe est transformé en :

D'après Thalès :  $(x, y) \rightarrow (x/y, 1)$

Un point de la courbe définie par les points projetés est :

**Invariance par projection**

Soit une courbe définie par :  $C(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P_i \quad \forall t \quad (1)$

**Les objets modélisés sur le principe (1)**

- les courbes à pôles en CAO (y compris les courbes rationnelles)
- les surfaces à pôles en CAO (y compris les surfaces rationnelles)

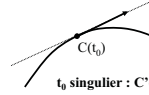
ne sont pas invariants par projection perspective

- Les objets polynomiaux sont transformés en des objets rationnels
- On parle d'invariance projective des courbes et surfaces rationnelles : ce n'est pas du tout la même propriété
  - une courbe rationnelle se projette suivant une courbe rationnelle
  - une surface rationnelle se projette suivant une surface rationnelle

**Deuxième partie :  
Géométrie des courbes**

**Tangente, courbure...**

- **Tangente** :  $C(t)$  de classe  $C^p$



Tangente à la courbe en  $C(t)$  :  
donnée par le premier vecteur  $C^{(k)}(t_0) \neq 0$   
et  $C^{(k)}(t_0)$  continu en  $t_0$  ( $k \leq p$ )

$t_0$  singulier :  $C'(t_0) = 0$  (ou stationnaire)

Attention différence cartésien - paramétrique

- **Abscisse curviligne**

- soit un point de départ fixé
- $s(t) = \varepsilon \int_{t_0}^t \|C'(u)\| du$
- $\frac{ds}{dt} = \varepsilon \|C'(t)\| = 0 \Leftrightarrow C$  stationnaire en  $t$
- On choisit une orientation (fixe  $\varepsilon$ ) : longueur *orientée* de la courbe
  - intrinsèque à la courbe
  - peut servir de paramétrisation (intéressante)

**Trièdre de Frenet courbes planes**

- **Vecteur tangent**

$$\frac{dC}{ds} = \frac{dC}{dt} \frac{dt}{ds} \quad \frac{dt}{ds} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} = \frac{1}{\|C'(t)\|} \quad (\varepsilon = 1)$$

$$\frac{dC}{ds} = \frac{C'(t)}{\|C'(t)\|} = T \quad T \text{ vecteur tangent (vecteur normé de la tangente)}$$

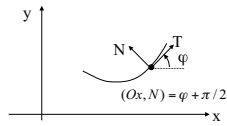
- **Vecteur courbure**

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} N = k N$$

$N$  vecteur normal (normé)

$$\frac{d\varphi}{ds} \text{ courbure algébrique} = \frac{1}{R} \text{ rayon de courbure algébrique}$$

- courbe  $C^2$  : à courbure continue
- courbe  $C^1$  : a priori pas à courbure continue (voir continuité géométrique)



**Trièdre de Frenet courbes gauches**

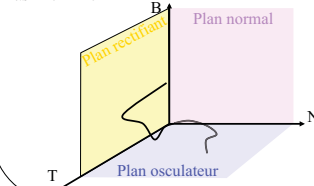
- **Trièdre (M, T, N, B)**

$$\frac{dC}{ds} = T : \text{vecteur normé de la tangente} \quad (\text{une orientation fixée})$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{R} N : \text{vecteur courbure, } N \text{ vecteur normal, } R \text{ rayon de courbure}$$

$$B = T \wedge N : \text{vecteur normé de la binormale}$$

$$\frac{dB}{ds} = \frac{1}{\tau} N : \frac{1}{\tau} \text{ torsion algébrique, } \tau \text{ rayon de torsion}$$



**Plan osculateur** :  
plan du cercle osculateur  
**Torsion** :  
variation du plan osculateur  
torsion nulle ?

**Trièdre de Frenet courbes gauches**

- **Deuxième formule de Frenet**

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ -\frac{1}{R} & 0 & -\frac{1}{\tau} \\ 0 & \frac{1}{\tau} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

$$|R| = \frac{\|C'(t)\|^3}{\|C'(t) \wedge C''(t)\|} = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}{\sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}}$$

$$\tau = \frac{\|C'(t) \wedge C''(t)\|}{\|C'(t)\|^2 \|C'''(t)\|} \quad (a, b, c) = (a^2 b), c$$

- **Courbure** : dérivée seconde, **Torsion** : dérivée troisième

- courbe  $C^2$  : courbure continue, torsion a priori non continue

- **Pour une courbe plane, un profil de courbure définit une courbe à une transformation rigide près**

- **Pour une courbe gauche : courbure + torsion (plus délicat)**

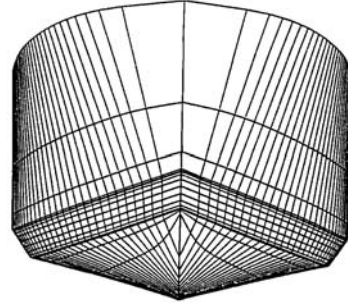
**Deuxième partie :  
Géométrie des surfaces**

**Plan tangent**

- **S(u,v) une surface de classe C<sup>2</sup>**
- **M(u,v) point régulier (non stationnaire) :**  $\text{vect}\left(\frac{\partial S}{\partial u}, \frac{\partial S}{\partial v}\right)$  est un plan
- **C courbe C<sup>1</sup> tracée sur la surface :**  $\begin{cases} u = \varphi(\lambda), v = \psi(\lambda) \\ \varphi \text{ et } \psi \text{ de classe } C^1 \end{cases}$   
 $C(\lambda) = S(\varphi(\lambda), \psi(\lambda))$   
 $\frac{dC(\lambda)}{d\lambda} = \varphi'(\lambda) \frac{\partial S}{\partial u}(\varphi(\lambda), \psi(\lambda)) + \psi'(\lambda) \frac{\partial S}{\partial v}(\varphi(\lambda), \psi(\lambda))$
- **Définition :** pour toute courbe de classe C<sup>1</sup> passant par M régulier :  
la tangente en M est dans un plan fixe appelé plan tangent défini par  $(M, \frac{\partial S}{\partial u}, \frac{\partial S}{\partial v})$
- **Remarques**
  - Indépendant du paramétrage de S
  - possibilité de demi-plan tangent
  - M régulier pour la surface, pas forcément pour la courbe
    - mais si la tangente existe, elle est toujours dans le plan tangent

Master SIS, Modélisation Géométrique 73

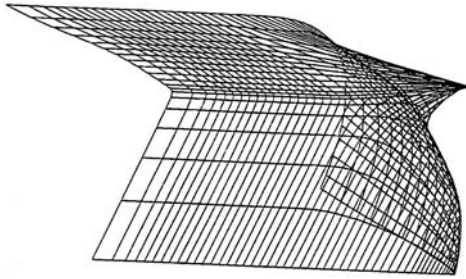
**Existence de demi-plans tangents**



On parle de lignes de bouchains (vifs) sur une carène

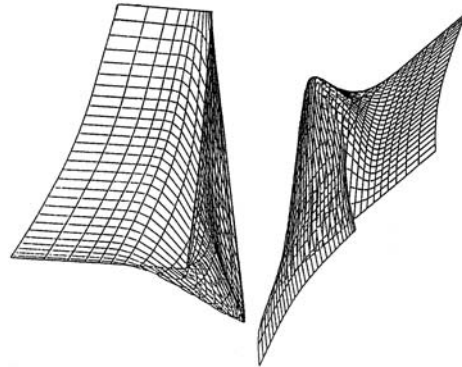
Master SIS, Modélisation Géométrique 74

**Un pic sur une surface**



Master SIS, Modélisation Géométrique 75

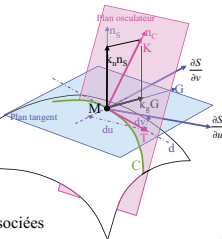
**Un problème délicat de plan tangent**



Master SIS, Modélisation Géométrique 76

**Courbures de surface**

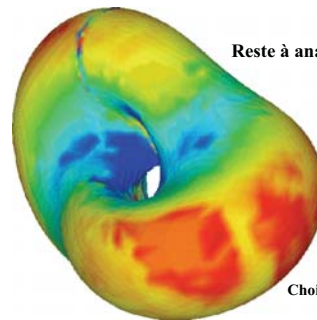
- **Courbure normale de C en M :**
  - projection du vecteur  $K = k n_C$  sur  $n_S$   $k_n = k n_C \cdot n_S = \frac{u'^2 L + 2u'v'M + v'^2 N}{u'^2 E + 2u'v'F + v'^2 G}$
  - ne dépend que de la direction définie par du et dv
- **Courbure normale de la surface dans une direction d**
  - courbure des courbes telles que  $n_C = n_S$
  - $k = k_n$
- **Courbures normales principales, directions principales**
  - les deux valeurs extrêmes
  - $k_1$  et  $k_2$  de la courbure normale
  - les directions  $d_1$  et  $d_2$  (orthogonales) associées



Master SIS, Modélisation Géométrique 77

**Carte de courbure gaussienne**

- **Origine de l'image :** <http://www.sop.inria.fr/safir/SAM/Izie/ArtGallery/borrelli.html>



Reste à analyser la carte obtenue !

Choix de l'échelle de couleurs ?

Master SIS, Modélisation Géométrique 78

## Troisième partie

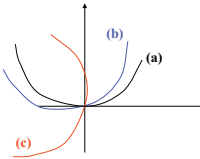
# Modélisation de Courbes et Surfaces : Modélisation surfacique

Un bon outil : <http://www.cs.mtu.edu/~shene/NSF-2/download.html>

Master SIS, Modélisation Géométrique 79

### Représentation cartésienne

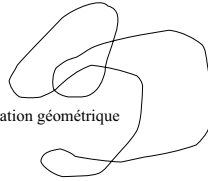
- Une courbe plane est définie par :  $y=f(x)$
- Une courbe gauche est définie par :  $y=f(x), z=g(x)$
- Avantages
  - en général la simplicité
  - l'accès direct à y et z connaissant x
- Inconvénients (majeurs)
  - Tangente verticale : il faut changer de référentiel
  - Une rotation altère la définition de la courbe :
    - \* modification du domaine de variation (b)
    - \* (c) non représentable par le même type d'équation



Master SIS, Modélisation Géométrique 80

### Représentation paramétrique

- Une courbe plane est définie par  $x(t), y(t)$
- Une courbe gauche par  $x(t), y(t), z(t)$
- Avantages
  - liberté sur les tangentes
  - forme quelconque
  - possibilité d'invariance par transformation géométrique
  - autre propriété à voir durant le cours
- Inconvénient
  - calcul parfois plus lourds ou plus délicats
- Attention à ne pas raisonner comme pour une représentation cartésienne (ex. : singularités)



Master SIS, Modélisation Géométrique 81

### Représentation paramétrique

- Choix d'un mode de représentation
 
$$C(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P_i \quad \forall t$$
  - choix des fonctions de poids (ou de base)
  - choix des coefficients vectoriels  $P_i$  (désormais des points), données locales « maîtrisées »
    - la courbe s'exprime directement par pondération de ces coefficients
  - intéressant en tant que possibilité de contrôle de la courbe
  - formulation identique quelle que soit la dimension de l'espace
    - 2D, 3D, nD
  - formulation écrite pour chaque coordonnée

Master SIS, Modélisation Géométrique 82

### Représentation paramétrique

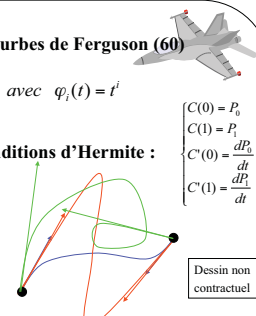
- Un exemple historique : les courbes de Ferguson (60)

$$C(t) = \sum_{i=0}^3 \varphi_i(t) A_i \quad t \in [0,1] \quad \text{avec} \quad \varphi_i(t) = t^i$$

la cubique doit vérifier les conditions d'Hermite :

$$\begin{cases} A_0 = P_0 \\ A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = P_1 \\ A_1 = \frac{dP_0}{dt} \\ A_1 + 2A_2 + 3A_3 = \frac{dP_1}{dt} \end{cases}$$

On a alors :



Dessin non contractuel

- on parle de splines de Ferguson par composition de courbes élémentaires
- instabilité « notoire » due à l'estimation des dérivées (directions, normes)
  - peut expliquer le succès des Bézier
  - peut s'exprimer sous une forme « plus agréable »

Master SIS, Modélisation Géométrique 83

### Représentation paramétrique

**Avertissements très importants :**

- 1) On fait de la modélisation de courbes et surfaces idéales et non réelles car :
  - la réalité est fractale (état de surface à l'échelle microscopique) alors que les modèles mathématiques sont « lisses »
  - la surface éventuellement créée a nécessairement une erreur par rapport au modèle (tolérancement)
- 2) Cadre du cours de modélisation géométrique et non d'un cours d'approximation
  - base de fonctions particulières (polynômes, exponentielles, trigonométriques, ...)

Master SIS, Modélisation Géométrique 84

Un peu d'« histoire »

- **Bézier, De Casteljau**
  - années 50 à 60 : la mise en place des méthodes
  - 87 : Ramshaw (blossoming : intérêt théorique)
  - 87 : Farouki (stabilité)
- **B-splines**
  - années 60 70 : De Boor (développement des splines en approximation)
  - 73 : thèse de Riesenfeld
  - 80 : Boehm (algorithme de raffinement)
  - 80 : Cohen, Lyche, Riesenfeld (algorithmes de raffinement Oslo)
  - 87 : Ramshaw (blossoming)
  - 90 : B-splines sur triangle, X-splines
- **Coons 60**

Master SIS, Modélisation Géométrique 85

Un peu d'« histoire »

- **Courbes rationnelles** : années 85-90
- **Fin du duel Bézier - B-splines : 90**
  - vision globale - passage d'une approche à l'autre
  - complémentarité
- **Années 90** :
  - explosion de la modélisation géométrique dans de nombreux domaines
  - apparition du problème de reconstruction
- **Années 95 : apparition des surfaces de subdivision**
  - très utilisées dans l'image et le film de synthèse
- **Le reste de l'histoire est à construire**

Master SIS, Modélisation Géométrique 86

## Courbes de Bézier

Master SIS, Modélisation Géométrique 87

Polynômes de Bernstein

- Soit  $\mathfrak{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degrés  $\leq n$
- **$\mathbb{C}^n$  est un espace vectoriel de dimension (n+1)**
  - la base la plus connue est la base canonique (power basis) :
    - $1, t, t^2, \dots, t^n$
- **Une autre base célèbre est la base de Bernstein (formée de (n+1) éléments)**
  - le ième polynôme de Bernstein est défini par :  $\varphi_{n,i}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$ 
    - degré n exactement
  - l'exemple le plus courant n=3
 
$$\begin{cases} \varphi_{3,0}(t) = (1-t)^3 \\ \varphi_{3,1}(t) = 3t(1-t)^2 \\ \varphi_{3,2}(t) = 3t^2(1-t) \\ \varphi_{3,3}(t) = t^3 \end{cases}$$

Master SIS, Modélisation Géométrique 88

Polynômes de Bernstein

- **Propriété de stabilité**
  - Parmi les bases de polynômes, la base de Bernstein est optimale pour effectuer les principaux calculs (travaux de R. Farouki)
    - calculs stables
  - Les formules de changement de bases Bernstein  $\rightarrow$  canonique sont connues explicitement dans les deux sens (matrice) : À éviter à tout pris surtout pour n grand : instable numériquement
- **Propriété fondamentale 1 : valeurs des polynômes**

$$\varphi_{n,i}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$$

$$\begin{cases} \varphi_{n,0}(0) = 1 \\ \varphi_{n,n}(1) = 1 \end{cases} \quad \text{de plus :} \quad \begin{cases} \forall i \neq 0 & \varphi_{n,i}(0) = 0 \\ \forall i \neq n & \varphi_{n,i}(1) = 0 \end{cases}$$

Un seul polynôme non nul en 0 et 1

Master SIS, Modélisation Géométrique 89

Polynômes de Bernstein

- **Propriété fondamentale 2 : positivité**

$$\forall t \in [0,1] \quad \varphi_{n,i}(t) \geq 0$$

$$\forall t \in ]0,1[ \quad \varphi_{n,i}(t) > 0$$
- **Propriété fondamentale 3 : dite de symétrie**

$$\forall t \in [0,1] \quad \varphi_{n,i}(t) = \varphi_{n,n-i}(1-t)$$
- **Propriété fondamentale 4 : partition de l'unité**

$$\forall t \in [0,1] \quad \sum_{i=0}^n \varphi_{n,i}(t) = 1 \quad (\text{vrai sur } \mathfrak{R})$$

Master SIS, Modélisation Géométrique 90

**Polynômes de Bernstein**

- **Propriété 5** : Le maximum de  $\varphi_{n,i}(t)$  est en  $i/n$

$$\varphi'_{n,i}(t) =$$

extremum : continuité, conditions d'extrémité et positivité  $\Rightarrow$  maximum

- **Propriété fondamentale 6** : relation de récurrence

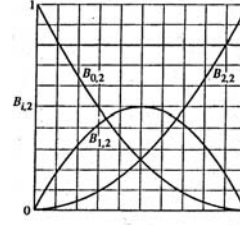
$$\text{pour } i = 1 \text{ à } n-1 \quad \varphi_{n,i}(t) = (1-t)\varphi_{n-1,i}(t) + t\varphi_{n-1,i-1}(t)$$

en posant  $\varphi_{n,i}(t) = 0$  pour  $i < 0$  et  $i > n$

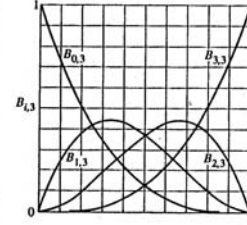
**(6) peut s'écrire pour  $i=0, \dots, n$**

**Polynômes de Bernstein**

**Quelques exemples**



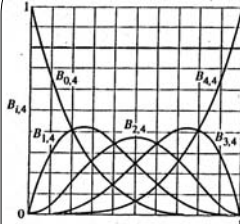
$$\begin{cases} B_{0,2}(t) = t^2 - 2t + 1 \\ B_{1,2}(t) = -2t^2 + 2t \\ B_{2,2}(t) = t^2 \end{cases}$$



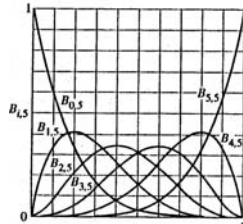
$$\begin{cases} B_{0,3}(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 \\ B_{1,3}(t) = 3t^3 - 6t^2 + 3t \\ B_{2,3}(t) = -3t^3 + 3t^2 \\ B_{3,3}(t) = t^3 \end{cases}$$

**Polynômes de Bernstein**

**Quelques exemples**



$$\begin{cases} B_{0,4}(t) = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 \\ B_{1,4}(t) = -4t^4 + 12t^3 - 12t^2 + 4t \\ B_{2,4}(t) = 6t^4 - 12t^3 + 6t^2 \\ B_{3,4}(t) = -4t^4 + 4t^3 \\ B_{4,4}(t) = t^4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} B_{0,5}(t) = -t^5 + 5t^4 - 10t^3 + 10t^2 - 5t + 1 \\ B_{1,5}(t) = 5t^5 - 20t^4 + 30t^3 - 20t^2 + 5t \\ B_{2,5}(t) = -10t^5 + 30t^4 - 30t^3 + 10t^2 \\ B_{3,5}(t) = 10t^5 - 20t^4 + 10t^3 \\ B_{4,5}(t) = -5t^5 + 5t^4 \\ B_{5,5}(t) = t^5 \end{cases}$$

**Courbes de Bézier**

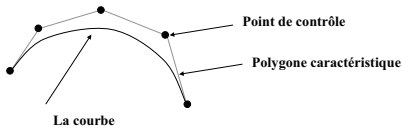
- Soit  $(n+1)$  points  $P_i$  de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$
- La courbe de Bézier associée à ces points est la courbe obtenue en prenant comme fonctions de poids les polynômes de Bernstein de degré  $n$ 
  - $(n+1)$  points  $(n+1)$  fonctions
  - $t \in [0,1]$

$$C(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_{n,i}(t) P_i \quad \forall t \in [0,1]$$

- Les points  $P_i$  sont appelés **points de contrôle**
- La ligne polygonale  $P_0 P_1 \dots P_n$  **polygone caractéristique** de la courbe ou **polygone de contrôle**

**Courbes de Bézier**

- Les points  $P_i$  **contrôlent** la forme de la courbe



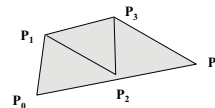
- La courbe est obtenue par pondération des points de contrôle. **Les points sont ordonnés**
- La courbe  $C$  est un polynôme de degré  $n$  exactement
  - polynôme à coefficient vectoriel
  - un polynôme de degré  $n$  par coordonnée
- Autres fonctions de base = autre méthode

**Propriétés des courbes de Bézier**

- **Barycentre des points de contrôle**
  - forme de définition
  - partition de l'unité

Le point  $C(t)$  est le barycentre des points  $P_i$  affectés des masses  $\varphi_{n,i}(t)$

- **Propriété d'enveloppe convexe**
  - forme de définition
  - partition de l'unité
  - positivité



La courbe  $C$  est dans l'enveloppe convexe des points  $P_i$

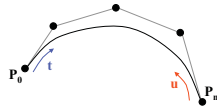


**Propriétés des courbes de Bézier**

- **Passage par les points extrêmes**
  - Propriété 1 (valeurs des polynômes de Bernstein)

$$C(0) = P_0 \text{ et } C(1) = P_n$$

- **Propriété de symétrie**
  - inversion du paramétrage  $u = 1 - t$
  - reparamétrisation



La même courbe C mais parcourue dans l'autre sens

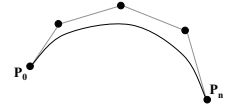
**Propriétés des courbes de Bézier**

- **Qu'est-ce que le paramétrage ?**
  - lien avec la cinématique
  - lien avec le temps

- **Problème simplifié pour les Bézier**

- **Pourquoi est-ce important ?**

Une courbe de Bézier « bien » paramétrée



Une courbe de Bézier « mal » paramétrée



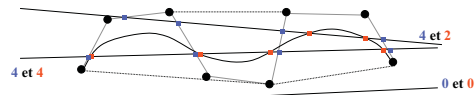
**Propriétés des courbes de Bézier**

- **Changement de paramétrage**
  - en posant  $u = (t-a)/(b-a)$
  - quand t décrit [a,b], u décrit [0,1]
  - et réciproquement
- **On peut définir une courbe de Bézier sur un intervalle [a,b] quelconque**
  - sans difficulté sauf en cas d'une courbe composée de plusieurs courbes de Bézier successives
  - problème du paramétrage global !

**Propriétés des courbes de Bézier**

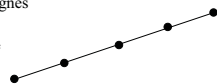
- **Propriété de diminution des variations**
  - « variation diminishing »
  - la courbe est plus « régulière que son polygone caractéristique »
  - plus « lisse », plus esthétique, « moins de variation »

Le nombre d'intersections de toute droite avec le polygone caractéristique est supérieur ou égal au nombre d'intersections de la droite avec la courbe



**Propriétés des courbes de Bézier**

- **Propriété de reproduction de la linéarité**
  - si les (n+1) points de contrôle sont alignés
    - démonstration par le calcul
    - démonstration par l'enveloppe convexe
  - idem pour la planéité
- **Invariance par transformation affine**
- **Influence des points de contrôle**
  - contrôle global
    - contrôle plus délicat
    - effet de lissage
  - l'influence du point  $P_i$  est maximale en  $i/n$
  - déplacement d'un point



**Dérivée d'une courbe de Bézier**

- **Dérivée d'un polynôme de Bernstein :**  $\varphi_{n,i}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$

$$\varphi'_{n,i}(t) = C_n^i i t^{i-1} (1-t)^{n-i} - C_n^i (n-i) t^i (1-t)^{n-i-1}$$

$$\varphi'_{n,i}(t) = n(\varphi_{n-1,i-1}(t) - \varphi_{n-1,i}(t))$$

en posant  $\varphi_{n,i}(t) = 0$  pour  $i < 0$  et  $i > n$ . Autrement :

$$\varphi'_{n,0}(t) = -n\varphi_{n-1,0}(t)$$

$$\varphi'_{n,n}(t) = n\varphi_{n-1,n-1}(t)$$

- **Dérivée d'une courbe de Bézier**  $C(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_{n,i}(t) P_i \quad \forall t \in [0,1]$

$$C'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{n-1,i}(t) (P_{i+1} - P_i)$$

**Dérivée d'une courbe de Bézier**

- Dérivée d'une courbe de Bézier  $C'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{n-1,i}(t)(P_{i+1} - P_i)$

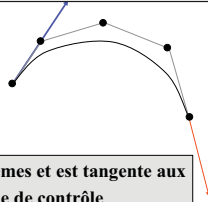
La dérivée d'une courbe de Bézier de degré n est une courbe de Bézier de degré n-1

- Conséquence fondamentale

$$C'(0) = n(P_1 - P_0) \quad (= n \overrightarrow{P_0 P_1})$$

$$C'(1) = n(P_n - P_{n-1}) \quad (= n \overrightarrow{P_{n-1} P_n})$$

La courbe passe par les points extrêmes et est tangente aux deux segments extrêmes du polygone de contrôle



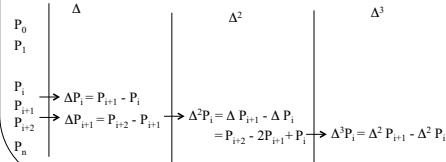
**Dérivée d'une courbe de Bézier**

- Dérivée d'ordre supérieur d'une courbe de Bézier

La dérivée k<sup>ème</sup> d'une courbe de Bézier de degré n est une courbe de Bézier de degré n-k

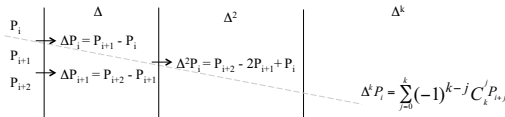
$$C^{(k)}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \varphi_{n-k,i}(t) \Delta^k P_i \quad (\text{par récurrence})$$

$\Delta^k P_i$ , différence latérale descendante d'ordre k calculée à partir de  $P_i$



**Dérivée d'une courbe de Bézier**

- Différence latérale d'ordre k

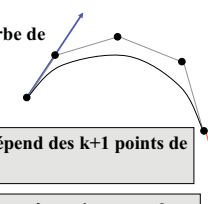


- La dérivée n+p<sup>ème</sup> (p>0) d'une courbe de Bézier de degré n est nulle

- Conséquences fondamentales

La dérivée k<sup>ème</sup> à chaque extrémité dépend des k+1 points de contrôle extrêmes

Une courbe de Bézier de degré deux est nécessairement plane



**Calcul d'un point d'une courbe de Bézier**

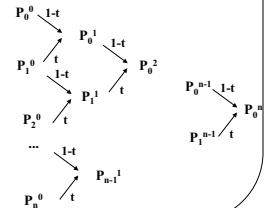
- Méthodes à proscrire

- calcul direct des polynômes de Bernstein par substitution de t
- algorithme de Hörner dans la base canonique

- Algorithme de De Casteljau

```

Début
  Pour j=0 à n
    P_i^0 = P_i
  FinPour
  Pour i=1 à n
    Pour j=0 à n-i
      P_j^i = (1-t) P_j^{i-1} + t P_{j+1}^{i-1}
    FinPour
  FinPour
  // C(t) = P_0^n
Fin
    
```

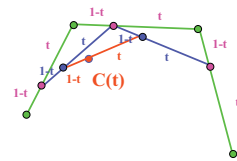


**Calcul d'un point d'une courbe de Bézier**

- Algorithme de De Casteljau : interprétation graphique

```

Début
  Pour j=0 à n
    P_i^0 = P_i
  FinPour
  Pour i=1 à n
    Pour j=0 à n-i
      P_j^i = (1-t) P_j^{i-1} + t P_{j+1}^{i-1}
    FinPour
  FinPour
  // C(t) = P_0^n
Fin
    
```



- Etape 0
- Etape 1
- Etape 2
- Etape 3

**Calcul d'un point d'une courbe de Bézier**

- Algorithme de De Casteljau : démonstration

-relation de récurrence pour  $i = 1$  à  $n-1$   $\varphi_{n,i}(t) = (1-t)\varphi_{n-1,i}(t) + t\varphi_{n-1,i-1}(t)$

$$C(t) = \sum_{i=0}^n P_i [(1-t)\varphi_{n-1,i}(t) + t\varphi_{n-1,i-1}(t)]$$

$$C(t) = \sum_{i=1}^{n-1} P_i [(1-t)\varphi_{n-1,i}(t) + t\varphi_{n-1,i-1}(t)] + P_0(1-t)\varphi_{n-1,0}(t) + P_n t\varphi_{n-1,n-1}(t)$$

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i^1 \varphi_{n-1,i}(t)$$

En réappliquant la formule récursivement

$$C(t) = P_0^n \varphi_{0,0}(t)$$

```

Début
  Pour j=0 à n
    P_j^0 = P_j
  FinPour
  Pour i=1 à n
    Pour j=0 à n-i
      P_j^i = (1-t) P_j^{i-1} + t P_{j+1}^{i-1}
    FinPour
  FinPour
  // C(t) = P_0^n
Fin
    
```

**Calcul d'un point d'une courbe de Bézier**

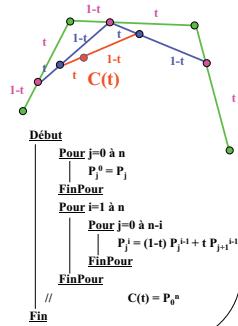
**Algorithme de De Casteljau : stabilité et évaluation**

- une formulation récursive à proscrire
- combinaisons linéaires convexes
- (1-t) calculé une fois

- pour chaque coordonnée :  
 $n + n-1 + n-2 + \dots + 1$  additions  
 $(n + n-1 + n-2 + \dots + 1) \times 2$  multiplications

- pour une courbe 2D :
- pour une courbe 3D :

**Onéreux mais stable**

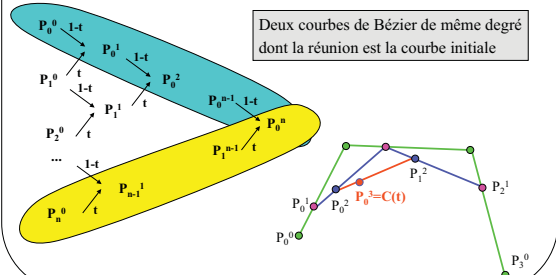


**Calcul d'un point d'une courbe de Bézier**

**Algorithme de De Casteljau : subdivision**

- l'algorithme « crée » les points  $P_0^0, P_0^1, \dots, P_0^n$
- l'algorithme « crée » les points  $P_n^0, P_{n-1}^1, \dots, P_n^n$

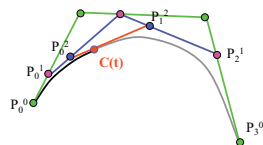
Deux courbes de Bézier de même degré dont la réunion est la courbe initiale



**Calcul d'un point d'une courbe de Bézier**

**Algorithme de De Casteljau : subdivision (suite)**

- Une courbe C1
  - restriction de C à [0,t]
- Une courbe C2
  - restriction de C à [t,1]



**Propriété de convergence**

- l'algorithme de De Casteljau permet d'augmenter le nombre de points de contrôle
- **quand le nombre de points de contrôle augmente, la courbe et le polygone tendent à se confondre** (si points « bien répartis »)
- Plus « précisément » en coupant récursivement la courbe en  $t=1/2$  : « convergence uniforme » entre le polygone global et la courbe C

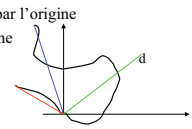
**Hodographe**

**L'hodographe d'une courbe de Bézier = courbe de Bézier d'une de ses dérivées**

- hodographe premier, hodographe p<sup>ème</sup>
- **Pas un nouveau concept, mais une vision différente**
  - interprétation graphique
  - conditions d'extrémités
  - algorithme de De Casteljau

**Traitement sur la dérivée : traitement comme sur la courbe**

- un point singulier : l'hodographe passe par l'origine
- une tangente de direction d : l'hodographe coupe la droite de direction d passant par l'origine



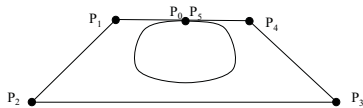
**Fermeture d'une courbe de Bézier**

**Courbe de Bézier de degré n fermée C<sup>k</sup>**

- la courbe est C<sup>∞</sup> sauf au point de raccord
- raccordement C<sup>0</sup> :
- raccordement C<sup>1</sup> :
- raccordement C<sup>k</sup> :

**Exemple courbe de degré 5 C<sup>2</sup>**

- raccordement C<sup>0</sup> : P<sub>0</sub>=P<sub>5</sub>
- raccordement C<sup>1</sup> : P<sub>1</sub>-P<sub>0</sub> = P<sub>5</sub>-P<sub>4</sub>
- raccordement C<sup>2</sup> : P<sub>2</sub>-2P<sub>1</sub>+P<sub>0</sub> = P<sub>5</sub>-2P<sub>4</sub>+P<sub>3</sub>



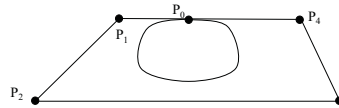
**Fermeture d'une courbe de Bézier**

**Courbe de Bézier de degré n fermée G<sup>k</sup>**

- la courbe est C<sup>∞</sup> sauf au point de raccord
- raccordement G<sup>0</sup> :
- raccordement G<sup>1</sup> :
- raccordement G<sup>k</sup> : plus complexe
  - perte de l'unicité

**Exemple courbe de degré 5 G<sup>1</sup>**

- raccordement G<sup>0</sup> : P<sub>0</sub>=P<sub>5</sub>
- raccordement G<sup>1</sup> : P<sub>1</sub>-P<sub>0</sub> = a(P<sub>5</sub>-P<sub>4</sub>)



**Raccordement de courbes de Bézier**

- **Le cas de toutes les courbes de Bézier complexes**
  - logiciels de CAO s'appuyant sur les Bézier (exemple historique Unisurf)
- **C1 courbe de Bézier de degré n définie sur [0,1], P<sub>0</sub>, ..., P<sub>n</sub>**
- **C2 courbe de Bézier de degré m définie sur [0,1], R<sub>0</sub>, ..., R<sub>m</sub>**
  - ou sur [1,2]

- **La courbe C1UC2 est C<sup>∞</sup> sauf au point de raccord**

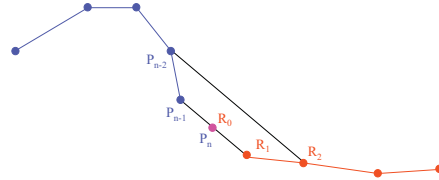
$$C1^{(k)}(1) = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k P_{n-k} \quad C2^{(k)}(0) = \frac{m!}{(m-k)!} \Delta^k R_0$$

- raccordement C<sup>k</sup>:  $\frac{n!}{(n-j)!} \Delta^j P_{n-j} = \frac{m!}{(m-j)!} \Delta^j R_0 \quad j = 0, \dots, k$

- **Raccordement G<sup>k</sup>: perte de l'unicité**

**Raccordement de courbes de Bézier**

- **Exemple : raccordement C<sup>2</sup> de deux courbes de degré n**
  - raccordement C<sup>0</sup>: P<sub>n</sub>=R<sub>0</sub>
  - raccordement C<sup>1</sup>: P<sub>n</sub>-P<sub>n-1</sub> = R<sub>1</sub>-R<sub>0</sub>
  - raccordement C<sup>2</sup>: P<sub>n</sub>-2P<sub>n-1</sub>+P<sub>n-2</sub> = R<sub>2</sub>-2R<sub>1</sub>+R<sub>0</sub>



- degrés différents : tenir compte des ratios liés aux degrés

**Conclusions sur les Bézier**

- **Modèle historique**
  - simple
  - expression de tout polynôme à coefficients vectoriels
  - pas de choix du degré (mais élévation du degré possible)
  - contrôle global bien connu (lissage important)
  - peu de paramètres
- **Les inconvénients**
  - la complexité augmente avec le nombre de points
  - limitation obligatoire du degré (9 à 10 en pratique)
  - contrôle global
  - pas adapté pour l'interpolation directe d'un nuage de points
    - interpolation par morceaux
    - instabilité avec les degrés élevés
- **Doit être vu comme un arc élémentaire de spline**

**Surfaces sous forme produit tensoriel**

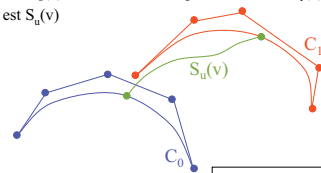
**Principes**

- Soit P<sub>nu,nv</sub>[u,v] l'espace des polynômes de la forme :
 
$$P(u, v) = \sum_{i=0}^{nu} \sum_{j=0}^{nv} a_{ij} u^i v^j$$
- P<sub>nu,nv</sub>[u,v] est le produit tensoriel des espaces P<sub>nu</sub>[u] et P<sub>nv</sub>[v]
- **Produit tensoriel : notion mathématique liée à la théorie des tenseurs**
- **Se traduit par des techniques**
  - de sommations multiples
  - de manipulation d'indices
  - de symétrie dans les formules sur les indices

**Principes**

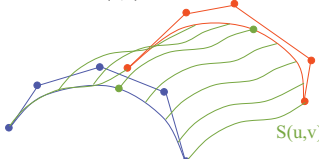
- **Une surface, ou plus généralement, un nappé (paramétrée) est une variété de dimension 2**
  - deux paramètres

- Soit une courbe C<sub>0</sub> (ou C(0))  $C_0(u) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(u) P_i$ 
  - Déformons C<sub>0</sub> pour l'amener dans une nouvelle position C<sub>1</sub> (C(1))
  - Supposons que la déformation soit continue
  - Chaque point de C<sub>0</sub>(u) décrit une courbe pour arriver en C<sub>1</sub>(u)
  - Cette courbe est S<sub>u</sub>(v)



**Principes**

- On a défini une surface  $S(u,v)$



- On peut écrire : 
$$S(u,v) = \sum_{j=0}^{mv} P_j(u) \psi_j(v)$$
- Et finalement 
$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{nu} \sum_{j=0}^{mv} P_{ij} \varphi_i(u) \psi_j(v)$$

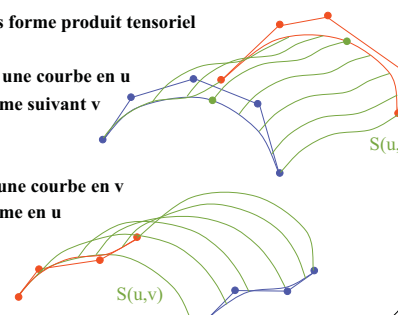
Master SIS, Modélisation Géométrique 121

**Principes**

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{nu} \sum_{j=0}^{mv} P_{ij} \varphi_i(u) \psi_j(v)$$

est définie sous forme produit tensoriel

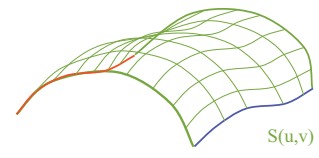
- Vue comme une courbe en  $u$  qui se déforme suivant  $v$
- Ou comme une courbe en  $v$  qui se déforme en  $u$



Master SIS, Modélisation Géométrique 122

**Principes**

- Ou comme un réseau de courbes



$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{nu} \sum_{j=0}^{mv} P_{ij} \varphi_i(u) \psi_j(v)$$

- Les points  $P_{ij}$  sont appelés points de contrôle et définissent le polyèdre de contrôle

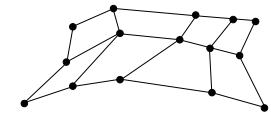
Master SIS, Modélisation Géométrique 123

**Principes**

- Conséquence fondamentale

**Le réseau de points de contrôle est un réseau régulier de points**

- le réseau forme un maillage de type quadrilatère
- le réseau correspond à un système de double indice
- les points peuvent se ranger dans une matrice (2,2) pleine



- Dans le cas contraire : dégénérescence du maillage et du modèle (des points multiples)

Master SIS, Modélisation Géométrique 124

**Propriétés des surfaces sous forme produit tensoriel**

- « Comme les courbes » !!
- Suivant les fonctions de base
  - carreau de Bézier
  - carreau B-splines
  - terme anglo-saxon de patch
- Pour les surfaces de Bézier
  - deux degrés  $nu, nv$
  - domaine paramétrique  $[0,1] \times [0,1]$  ou  $[a,b] \times [c,d]$

Master SIS, Modélisation Géométrique 125

**Propriétés des surfaces sous forme produit tensoriel**

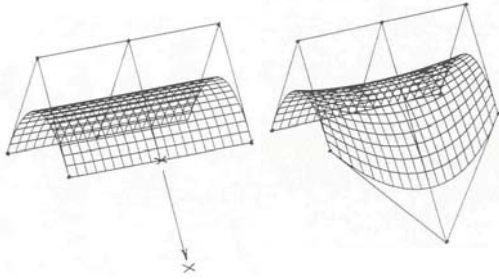
**Suivant les fonctions de base**

- (pour certaines propriétés)
- Invariance par transformation affine
- Reproduction de morceaux de plan
  - localement ou globalement
  - reproduction de segments de droite !
- Propriété d'enveloppe convexe
- Pas de propriété de diminution des variations
  - le réseau de points de contrôle donne l'allure de la surface
  - le réseau peut être convexe et la surface non elliptique
    - existence possible de zones de courbure gaussienne négative

Master SIS, Modélisation Géométrique 126

**Propriétés des surfaces sous forme produit tensoriel**

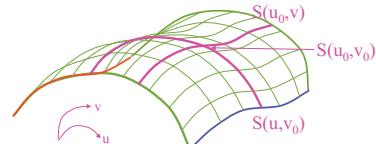
- **Illustration de la perte de « convexité »**



Master SIS, Modélisation Géométrique 127

**Propriétés des surfaces sous forme produit tensoriel**

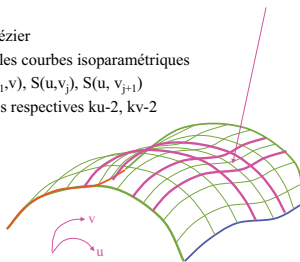
- **Courbes isoparamétriques**
  - en bloquant un paramètre à la fois
  - $S(u_0, v)$  ou  $S(u, v_0)$  sont des courbes isoparamétriques
  - inscrites sur la surface
  - la variation de ces courbes forme un réseau de courbes décrivant la surface
  - diminution de la complexité dimensionnelle de 1
  - les courbes isoparamétriques se coupent (en  $S(u_0, v_0)$ )



Master SIS, Modélisation Géométrique 128

**Propriétés des surfaces sous forme produit tensoriel**

- **Une surface de Bézier est un polynôme de degrés  $nu, nv : C^\infty$**
- **Sur chaque domaine paramétrique élémentaire  $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$  une surface B-spline est un polynôme de degrés  $ku-1, kv-1$** 
  - carreau de Bézier
  - s'appuie sur les courbes isoparamétriques
  - $S(u_i, v), S(u_{i+1}, v), S(u, v_j), S(u, v_{j+1})$
  - de continuités respectives  $ku-2, kv-2$



Master SIS, Modélisation Géométrique 129

**Propriétés des surfaces sous forme produit tensoriel**

- **Influence d'un point**
  - influence globale -locale
  - la surface est tirée vers le point
  - manipulation un peu moins intuitive que sur les courbes :
    - double pondération
- **Multiplicités dans les points de contrôle ou dans les lignes ou colonnes de points de contrôle**
  - extension des courbes
- **Gestion du nombre de nœuds pour gérer le nombre de points de contrôle**

Master SIS, Modélisation Géométrique 130

**Dérivations**

- **Rappel :**
- Si  $\frac{\partial^{r+s} S(u, v)}{\partial u^r \partial v^s}$  et  $\frac{\partial^{r+s} S(u, v)}{\partial v^s \partial u^r}$  sont continues, on a :  $\frac{\partial^{r+s} S(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} = \frac{\partial^{r+s} S(u, v)}{\partial v^s \partial u^r}$
- On prend  $r \leq ku-2$  et  $s \leq kv-2$

- **Chaque dérivée partielle d'une surface est une surface**

$$\frac{\partial^{r+s} S(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} = \frac{\partial^r}{\partial u^r} \left( \sum_{i=0}^{nu} \varphi_i(u) \left( \frac{\partial^s}{\partial v^s} \left( \sum_{j=0}^{nv} \psi_j(v) P_{ij} \right) \right) \right)$$

$$\frac{\partial^{r+s} S(u, v)}{\partial u^r \partial v^s} = \frac{\partial^r}{\partial u^r} \left( \sum_{i=0}^{nu} \varphi_i(u) Q_i \right) \text{ avec } Q_i = \frac{\partial^s}{\partial v^s} \left( \sum_{j=0}^{nv} \psi_j(v) P_{ij} \right)$$

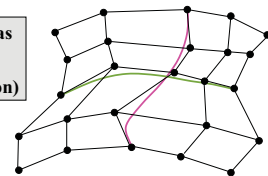
- formules locales pour les B-splines
- revient à deux opérations de dérivation sur les courbes
- surfaces hodographes

Master SIS, Modélisation Géométrique 131

**Conditions d'extrémités**

- **Préambule**
- **Chaque ligne, chaque colonne de points définit une courbe**

**En général, ces courbes ne sont pas des courbes de la surface (pondération dans l'autre direction)**



$$S(u, v) = \sum_{i=0}^{nu} \sum_{j=0}^{nv} P_{ij} \varphi_i(u) \psi_j(v)$$

Rien à voir avec des isoparamétriques

Master SIS, Modélisation Géométrique 132

**Conditions d'extrémités**

- **Propriétés des fonctions de base**
  - une seule fonction non nulle (=1) à chaque extrémité
  - (en général pour les B-splines)

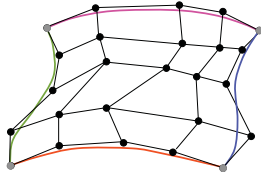
La surface  $S(u, v) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} P_{ij} \varphi_i(u) \psi_j(v)$

**passer par les 4 points extrêmes**

- $P_{0,0}$ ,  $P_{m,0}$ ,  $P_{0,n}$ ,  $P_{m,n}$

**s'appuie sur 4 courbe frontières définies par :**

- $P_{i,0}$ ,  $i=0, \dots, m$
- $P_{i,n}$ ,  $i=0, \dots, m$
- $P_{0,j}$ ,  $j=0, \dots, n$
- $P_{m,j}$ ,  $j=0, \dots, n$



**Conditions d'extrémités**

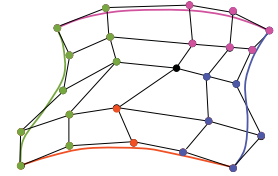
Le plan tangent de la surface  $S(u, v) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} P_{ij} \varphi_i(u) \psi_j(v)$

**aux 4 points extrêmes**

- dépend à chaque fois de trois points

**sur les courbe frontières des « lignes » de points :**

- $P_{i,0}$  et  $P_{i,1}$   $i=0, \dots, m$
- $P_{i,n}$  et  $P_{i,n-1}$   $i=0, \dots, m$
- $P_{0,j}$  et  $P_{1,j}$   $j=0, \dots, n$
- $P_{m,j}$  et  $P_{m-1,j}$   $j=0, \dots, n$

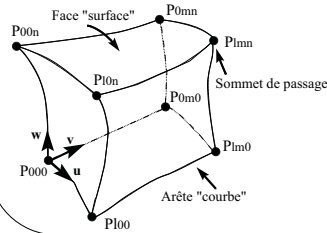


- **Pour les courbures : une ligne supplémentaire**

**Modélisation de solides**

**Modélisation de volumes (1/2)**

- **Soit un espace paramétrique de dimension 3**
  - parallélépipède rectangle en  $u, v, w$
- $H(u, v, w) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n P_{ijk} N_{i,ku}(u) N_{j,kv}(v) N_{k,kw}(w)$  définit un **volume sous forme produit tensoriel**



- On retrouve**
- Les points de passage
  - Les courbes frontières
  - Les surfaces frontières

**Modélisation de volumes (2/2)**

- **Pas plus de maîtrise des paramètres que pour les courbes et surfaces**
  - surfaces : comme les courbes ... en plus complexe
  - volumes : comme les surfaces ... en plus complexe
- **Permet de déformer facilement un espace : technique classique de déformation d'objets :**
  - plongement de l'objet dans un solide de ce type
  - déformation du solide, donc de l'objet

**Modèles implicites**

**Définition**

- Une courbe plane est définie par :  $f(x,y) = 0$
- Une surface est définie par  $f(x,y,z) = 0$  notation  $f(P) = 0$
- Une courbe gauche : intersection de deux surfaces
- Un modèle implicite dépend fortement du référentiel choisi (comme une représentation cartésienne)
- On impose au minimum que  $f$  soit différentiable
  - $f$  est continue
  - $f$  admet des dérivées partielles du premier ordre
    - non nécessairement continues

**Définition**

- Correspond implicitement à des courbes ou surfaces de niveau
  - $f(x,y,z) = c$  (ou  $f(x,y,z)-c = 0$ )
- Peut être vue comme une fonction de distance
  - $f(x,y,z)$  « distance » à la surface de niveau 0  $f(x,y,z) = 0$
  - intéressant de choisir  $f$  pour que cela corresponde bien à une mesure

• On appelle  $\vec{\text{grad}} f$ , le vecteur :  $\vec{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$

• En un point régulier ( $\vec{\text{grad}} f \neq 0$ ),  $\vec{\text{grad}} f$  est un vecteur normal à la surface (à la courbe)

**Quelques propriétés**

- Les surfaces les plus connues ont souvent une forme implicite :
  - $x^2+y^2+z^2 = R^2$
  - $x^2-y^2+z^2 = 0$
  - plan
  - cylindre, tore, ...
- Une surface implicite délimite un solide (non nécessairement borné, ex : cône)
- Obtention naturelle de l'intérieur de la peau et de l'extérieur avec le signe de  $f(P)$ 
  - $f(P) = 0$  peau
  - $f(P) > 0$  et  $f(P) < 0$  : intérieur et extérieur ou vice-versa.



**Quelques propriétés**

- Certaines surfaces (courbes) implicites peuvent s'exprimer sous forme paramétrique :
  - pas toujours possible
  - il existe des restrictions, ex : le cercle

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta) \\ y(\theta) = \sin(\theta) \end{cases} + \text{conditions sur } \theta$$

$$\begin{cases} x(u) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ y(u) = \frac{2u}{1+u^2} \end{cases} \quad (u = \tan \frac{\theta}{2} + \text{conditions sur } u + \text{cercle partiel !})$$

**Quelques propriétés**

- Certaines surfaces paramétriques peuvent s'exprimer sous forme implicites :
  - par exemple, les Bézier et les B-splines rationnelles ou non
  - élimination des paramètres
  - « implicitization »
- Problèmes associés
  - calculs instables (résultants)
  - calculs très lourds
  - risque de degrés très (trop) élevés
    - une courbe de degré  $n$  devient implicite de degré  $n$
    - une surface de degré  $n$ ,  $m$  devient une surface implicite de degré  $2n \cdot m$ .
    - carreau bicubique : obtention d'une surface algébrique de degré 18 (1330 termes)

**Exemples**

- Quadriques  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
- Superquadriques  $\frac{x^q}{a^q} + \frac{y^r}{b^r} + \frac{z^s}{c^s} = 1 \quad (q,r,s,u,v,w) \in \mathbb{R}^6$



autorisation du Laboratoire Electronique et Informatique de l'Image Université de Bourgogne

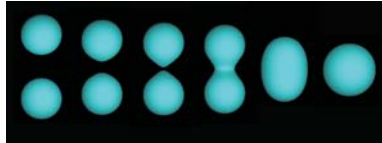
- Composition de surfaces  $F(P) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(P) \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$ 
  - composition très simple (en + ou -)
  - addition des contributions



**Surfaces de potentiel**

- Définir un ensemble de points  $P_i$
- Pour chaque point  $P_i$ ,
  - définir une fonction  $F_i(|P-P_i|)$
  - décroissante en fonction de la distance (zone d'influence) (ex  $e^{-r}$ )
  - fonction dépendant de la distance au point
  - définir l'influence de  $F_i$
  - blocs

• Définir un seuil  $c$  : 
$$F(P) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(P) - c \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$



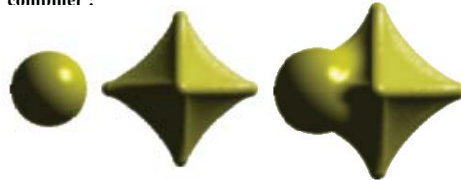
Ex de « fusion » de 2 blocs se rapprochant

origine LE2I, Université de Bourgogne

Master SIS, Modélisation Géométrique 145

**Surfaces de potentiel**

- On peut jouer sur :
  - la position des points  $P_i$
  - les fonctions  $F_i$  (beaucoup de possibilités)
  - les coefficients d'influence des  $F_i$
- On peut centrer sur chaque  $P_i$  une surface implicite et combiner :

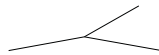


origine LE2I, Université de Bourgogne

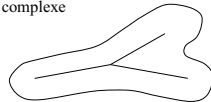
Master SIS, Modélisation Géométrique 146

**Surfaces de potentiel**

- Notions de squelette :
  - ensemble organisé de points, de segments, triangles, etc ...,



- Modélisation à partir de squelette
  - les fonctions  $F_i$  sont des fonctions dépendant de la distance au  $i$ ème élément du squelette
  - définition d'un seuil
  - modélisation d'une surface complexe suivant le squelette
  - possibilités intéressantes



Master SIS, Modélisation Géométrique 147

**Quatrième partie**  
**Modélisation de solides**  
**Modélisation volumique**

Master SIS, Modélisation Géométrique 148

**Propriétés topologiques**

- La notion de topologie devient primordiale pour la modélisation de solides
- Deux approches principales :
  - approche CSG (Constructive Solid Geometry)
    - combinaison booléenne de solides plus simples
    - arbre CSG contenant l'historique de la construction
  - modélisation B-Rep (Boundary Representation)
    - les frontières de l'objet
    - les relations topologiques entre les éléments des frontières

Master SIS, Modélisation Géométrique 149

**Modèles B-Rep**

Master SIS, Modélisation Géométrique 150

**Modèle B-Rep**

- **Les modèles se différencient par**
  - les possibilités topologiques (liens entre les éléments)
  - les types de surfaces possibles (planes ... NURBS ...)
- **Topologie d'un objet**
  - un ensemble de volumes  $V_i$
  - un ensemble de faces  $F_i$
  - un ensemble d'arêtes  $A_i$
  - un ensemble de sommets  $S_i$
  - un ensemble de liens entre
    - les volumes
    - les faces
    - les arêtes
    - les sommets

Les redondances peuvent exister :  
sont parfois intéressantes

**Modèle CSG**

**Modèle CSG**

- **Constructive Solid Modeling**
- **Un ensemble d'objets primitifs  $(P_i)$** 
  - cylindre
  - parallélépipède rectangle
  - sphère
  - ....

Objets normalement bornés
- **Un ensemble de transformations géométriques  $(G_i)$** 
  - translation
  - rotation
  - changement d'échelle et homothétie
- **Un ensemble d'opérateurs ensemblistes régularisés  $(E_i)$** 
  - union (ou)
  - intersection (et)
  - différence (diff)

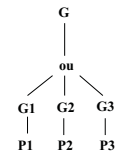
**Modèle CSG**

**D'un point de vue théorique, un objet CSG O est défini par :**

$$O = \begin{cases} P & \text{pour un objet primitif} \\ (Opér, O_1, \dots, O_n) & \text{autrement} \end{cases}$$

- **Opér est un opérateur n-aire. En général :**
  - n=1 pour les opérateurs géométriques
  - n≥2 pour les opérateurs ensemblistes

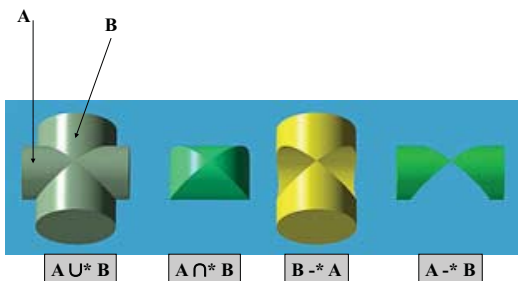
- **Un objet CSG se définit par son arbre constructif**  
L'objet est l'union de 3 objets primitifs préalablement transformés  
l'ensemble subit une transformation géométrique



L'arbre est ordonné !

**Modèle CSG**

- **Un exemple introductif**



**Modèle CSG**

- **L'arbre de construction n'est pas unique**
  - peut être mis sous forme d'un arbre binaire
  - La description syntaxique est simple



**Objet à créer**

- 1) prendre trois objets primitifs
- 2) faire les transformations géométriques  
G1(bloc1)  
G2(bloc2)  
G3(cylindre)  
(échelles, translations, rotations)
- 3) union des deux blocs  
union(G1(bloc1),G2(bloc2))
- 4) Réalisation du trou  
diff(union(G1(bloc1),G2(bloc2)),G3(cylindre))



#### CSG-Brep : Conclusions

Une bonne représentation doit satisfaire au mieux :

- **Domaine représentable**
  - nombre intéressant d'objets ou de classes d'objets
- **Unicité de la construction**
  - une seule voie  $\Rightarrow$  simplicité de comparaison
- **Précision du modèle**
- **Validité**
  - tous les objets sont des vrais solides
- **Compacité et efficacité ET REpondre AUX BESOINS**

Master SIS, Modélisation Géométrique 157

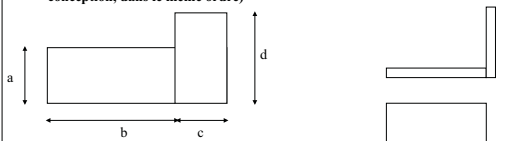
## Cinquième partie

### Différentes Approches de la Modélisation Géométrique

Master SIS, Modélisation Géométrique 158

#### Modèle paramétrique

- **L'obtention du modèle courant s'effectue par modification des valeurs des paramètres d'un modèle interne (on rejoue la conception, dans le même ordre)**



- efficace, mais peut manquer de souplesse
- attention à la validité du paramétrage

- **Possibilité de paramétrer des fonctions du modèle**
  - existence ou non
  - nombre de trous, ...

Master SIS, Modélisation Géométrique 159

#### Modèle paramétrique

- **La problématique est assez simple (modeleurs 2 et 3D)**
- **Historique de conception, approche constructive**
- **Les contraintes sont orientées ( $L = 2 * 1$ )**
- **La résolution revient à décomposer le problème en sous-problèmes traités séquentiellement**
- **Contraintes sont simples (de bas niveau entre les variables)**
  - pas d'ingénierie
- **Le problème est bien contraint**

Master SIS, Modélisation Géométrique 160

#### Modèle variationnel

- **Le modèle n'est que partiellement paramétré**
  - Pas d'ordre de conception imposé
  - Définition partielle
- **La définition du modèle s'affine progressivement**
  - via la prise en compte de contraintes fonctionnelles
  - de plus ou moins haut niveau
  - la résolution de contraintes
- **Approche de plus haut niveau que l'approche paramétrée**
  - peut en être très proche (résolution de contraintes dans les deux cas)
  - Plus générale
  - nécessite encore de très nombreux travaux

Master SIS, Modélisation Géométrique 161

#### Modèle variationnel

- **La problématique est complexe**
  - utilisation 2D (stekcheurs)
- **Résolution simultanée**
- **Les contraintes peuvent être non orientées ( $L - 2 * 1 = 0$ )**
- **La résolution revient à décomposer le problème en sous-problèmes indépendants**
- **Contraintes diverses**
  - Contraintes d'ingénierie
- **Le problème peut être sous, bien ou sur-contraint**
  - Famille de solutions
  - Une solution
  - Pas de solution : relaxation de contraintes

Master SIS, Modélisation Géométrique 162

**Modélisation par entités**

- **Modélisation par entités ou caractéristiques ou « features »**
  - Modèle souvent paramétrique
- **Il s'agit de créer des objets par assemblage ou ajouts d'entités ayant une signification en terme de métier**
  - généralement une information de forme (attachée ensuite à l'objet)
  - des informations métier
    - topologique
    - usinage
    - tolérance
    - ...
- **Le modèle possède une signification pour le ou les métiers**
- **Problème actuel : extraction des caractéristiques**
  - non présentes dans le modèle
  - utiles pour la manipulation ou l'échange

Master SIS, Modélisation Géométrique 163

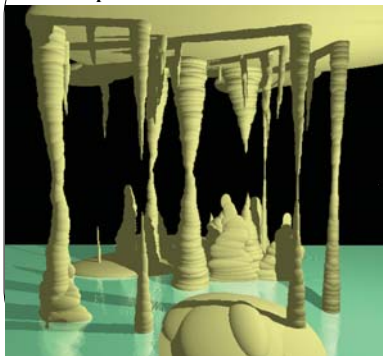
**Modélisation déclarative**

- **Le concepteur donne à la machine la liste des propriétés et contraintes définissant l'objet : approche de haut niveau**
- **L'ordinateur**
  - produit tous les objets correspondant à cette définition
  - explore l'univers des solutions
    - intéressant si le problème est sous-contraint
- **Le concepteur choisit, parmi toutes les propositions du calculateur, celle(s) qui lui convient (ennent) le mieux**
- **Plus simple pour les univers discrets que continus**
- **L'objet possède intrinsèquement dans son modèle ses propriétés**
- **Description partielle, langage propre à l'application**
- **Plutôt adapté à la conception rapide et à l'ébauche**

Master SIS, Modélisation Géométrique 164

**Modélisation déclarative**

- **Exemple : réalisation de scènes**



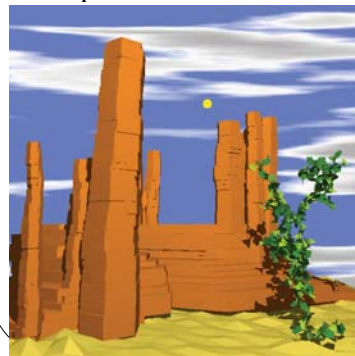
- **Définition de zones et d'un mode de croissance**
- **Habillage pour la visualisation**

Réalisation :  
Danièle Chauvat,  
IRIN, Nantes

Master SIS, Modélisation Géométrique 165

**Modélisation déclarative**

- **Exemple : réalisation de scènes**

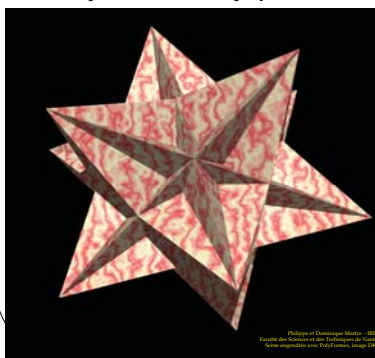


Réalisation :  
Danièle Chauvat,  
IRIN, Nantes

Master SIS, Modélisation Géométrique 166

**Modélisation déclarative**

- **Exemple : définition de polyèdres**



- **Grand Icosaèdre**
- **polyèdre semi-régulier**
- **sommets étoilés d'ordre 5**
- **faces triangulaires équilatérales**

Réalisation :  
P. et D. Martin,  
IRIN, Nantes

Master SIS, Modélisation Géométrique 167

**Modélisation déclarative**

- **Exemple : définition de polyèdres**



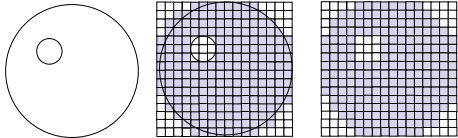
antiprisme

Réalisation :  
P. et D. Martin,  
IRIN, Nantes

Master SIS, Modélisation Géométrique 168

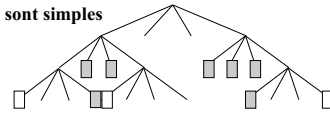
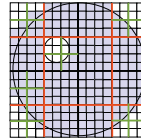
**Matrices d'énumération spatiale**

- **L'espace est décomposé en cellules de tailles fixes appelées voxels**
  - décomposition de l'espace et indirectement de l'objet
- **La valeur du voxel indique la présence ou non de matière**
- **La finesse dépend de la taille du voxel**
  - modélisation très simple
  - parfois suffisante
  - pouvant être excessivement « gourmande » en mémoire



**Quatree - Octree**

- **Arbre quaternaire - arbre octal**
  - même idée que la matrice d'énumération spatiale
  - on ne décompose que les zones qui sont :
    - ni totalement pleines
    - ni totalement vides
- **Quatree : plan - Octree : espace**
- **Notion de voisinages sont simples**



Nettement plus efficace en mémoire  
Même problème de finesse de définition

**Modélisation par des voxels**

- **Une des premières techniques de modélisation**
- **On parle de volumes binaires**
  - Nombreuses applications
    - Correspond en particulier à l'imagerie médicale
- **Modélisation simple et robuste**
  - Adaptée à la multi-résolution
  - Grand intérêt pour les environnements de réalité virtuelle

**Sixième partie**  
**Surfaces de subdivision**

**Introduction**

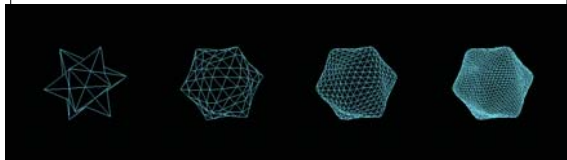
- **Une surface de subdivision**
  - Maillage initial
    - Régulier ou irrégulier
  - Des règles de subdivision
    - Compatibles avec le maillage
    - Nouveau maillage avec plus de points
    - Conservation de points ou non
  - Tend vers une surface de plus en plus « lisse »
  - Les schémas utilisés convergent vers une surface continue
  - Apparition en 1978 (Catmull-Clark)
  - Véritables avancées dans les années 90-95



**Introduction**

- **Un ensemble organisé de points (organized) points**
- **Une simple formule pour calculer un nouveau ensemble de points**

$$S_{i+1} = f(S_i) \text{ and } S = \lim_{i \rightarrow \infty} S_i$$



- **Une texture sur le maillage**
  - C'est (presque) tout ...

**Introduction**

- Un exemple avec le schéma de Doo-Sabin

Master SIS, Modélisation Géométrique 175

**Introduction**

- Possibilité de géométries complexes

Master SIS, Modélisation Géométrique 176

**Introduction**

- Quelques surfaces de subdivision familières

Images: Pixar and Dreamworks studios

Master SIS, Modélisation Géométrique 177

**Introduction**

- Application principale : film d'animation
  - Peu de précision
  - Grande simplicité de mise en oeuvre
  - Notion de multi-résolution

Master SIS, Modélisation Géométrique 178

**Introduction**

- Utilisation dans les modelleurs géométriques

2.496 polygones

- Certains schémas convergent vers des surfaces connues :
  - ex : B-splines bicubiques

⇒ utilisation dans les systèmes de CAO en tant que « brouillon » polyédrique de la surface continue

Master SIS, Modélisation Géométrique 179

**Les schémas de subdivision**

- Un schéma simpliste

Flocon de Koch

C'est le schéma qui implique la continuité à la limite

Master SIS, Modélisation Géométrique 180

**Les schémas de subdivision**

- **Le schéma de Chaikin (1974)**
  - Principe du « corner cutting »

$$Q_i = 3/4 P_i + 1/4 P_{i+1}$$

$$R_i = 1/4 P_i + 3/4 P_{i+1}$$

**Converge vers une B-spline uniforme quadratique**

Master SIS, Modélisation Géométrique 181

**Les schémas de subdivision**

- **Les coefficients des masques ne sont pas choisis au hasard !**
  - Choix fondés sur l'idée de reproduction de courbes définies par les n points du schéma
- **Des schémas de lissage**
  - On remplace des points
  - Ex : Chaikin
  - Schéma à 4 points de masque : 1/16 (-1, 9, 9, -1)
- **Des schémas d'interpolation**
  - On rajoute des points
  - Ex : Schémas à 4 points 1/16 (-5, 5, 15, 1)
    - Recherche de P(t) de degré 3 qui passe par les 4 points en t-3h, t-h, t+h, t+3h
    - P(t) est obtenu en partant des 4 développements de Taylor aux 4 points donnés. Point « proche » du 3e point

Master SIS, Modélisation Géométrique 182

**Les schémas de subdivision**

- **Schéma :**
  - Uniforme : mêmes règles sur tout le réseau (non-uniforme)
  - Stationnaire : mêmes règles pour toutes les subdivisions
  - On partage la face en insérant de nouveaux sommets, les anciens sont conservés : schéma primal
  - On partage les sommets pour créer de nouvelles faces (corner cutting), les faces sont conservées : schéma dual

Master SIS, Modélisation Géométrique 183

**Bilan (1/4)**

- **Outil extrêmement puissant, simple et reconnu**
  - Permet de gérer des topologies quelconques (genre quelconque)
  - Maillages éventuellement non homogènes
  - Simple et rapide à manipuler
  - Stable pour les calculs
  - Permet le raffinement local et la multi-résolution
- **Une surface de subdivision peut être vue**
  - Comme un maillage
  - Comme une surface (la surface limite)
- **Outil de compression intéressant**
  - Le maillage peut être transmis
    - Comme le maillage initial
    - Plus le schéma de subdivision

Master SIS, Modélisation Géométrique 184

**Bilan (2/4)**

- **Il s'agit fondamentalement d'un maillage**
  - On ne manipule jamais la surface
  - Aucune propriété différentielle « continue »
- **Problème de calcul des distances**
  - Au maillage initial
  - A la surface limite
- **Saut éventuel trop important entre deux subdivisions successives**
  - Crée des problèmes de transition trop brutal dans les animations

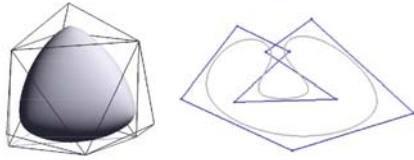
Master SIS, Modélisation Géométrique 185

**Bilan (3/4)**

- **Problèmes théoriques non résolus**
  - Ex : intersections
  - Peut-on déduire la courbe d'intersection au niveau p+1 de celle du niveau p ?

Master SIS, Modélisation Géométrique 186

- La topologie du maillage n'est pas forcément respectée après différentes subdivisions



- Domaine de recherche important

#### Courbes et surfaces

- 1) J. Bloomenthal, Introduction to Implicit Surfaces, ouvrage collectif édité par J. Bloomenthal, Morgan Kaufmann Publishers, 1997.
- 2) C De Boor, A Practical Guide to Splines, Springer Verlag, 1978.
- 3) G. Farin, Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide, Academic Press, 1988 ou version française et éditions plus récentes.
- 4) I. Faux, M. Pratt, Computational Geometry for Design and Manufacture, Ellis Horwood limited, 1979.
- 5) J.C. Léon, Modélisation et construction de surfaces pour la CFAO, Hermès, 1991.
- 6) M. Mortenson, Geometric Modeling, John Wiley and Sons Inc., Second Edition, 1997
- 7) L. Piegl, The NURBS book, Springer Verlag, 1995.
- 8) D. Rogers, J. Adams, Mac Graw-Hill, Mathematical Elements for Computer Graphics, 2de édition, 1990.
- 9) Informatique Graphique, modélisation géométrique et animation, Dominique Bechmann et Bernard Péroche (eds), Lavoisier-Hermès, 2007, ISBN : 978-2-7462-1514-6

#### Géométrie

- 1) M. Do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, 1976.
- 2) Y. Kerbrat, J.M. Braemer, Géométrie des courbes et des surfaces, Hermann, 1976.
- 3) Stoker, Differential Geometry, J. Wiley and Sons Inc., 1989.

#### Visualisation - Modélisation de solides

- 1) J. Foley, A. Van Dam, S. Feiner, J. Hughes, Computer Graphics, principles and practice, Addison-Wesley, 2de édition, 1990)
- 2) C. Hoffmann, Geometric & Solid Modeling, An Introduction, Morgan Kaufmann, 1989.
- 3) J. Mäntylä, An introduction to Solid Modeling, Computer Science Press, 1988.

#### Géométrie Algorithmique

- 1) J.D. Boissonnat, M. Yvinec, Géométrie Algorithmique, Ediscience international, 1995.
- 2) E. Preparata, M. Shamos, Computational Geometry, an introduction, Springer Verlag, 1985.