GESTION DES STOCKS

Plan du cours

1. Le rôle des stocks en gestion de production

2. Le problème de Wagner-Whitin

3. La quantité économique optimale et les politiques dérivées
4. Modèle de gestion de stocks avec demande aléatoire

Master SIS 2009-2010
Jean-Claude Hennet

Le rôle des stocks en gestion de production

- L'objectif « zéro stock »
  - N'est justifié que si les coûts de stockage sont très importants.
  - nécessite
    - Une demande régulière (production planifiée en fonction de la demande prévue)
    - Ou des temps de cycle des produits et des temps de préparation des machines suffisamment courts
    - De telles hypothèses sont rarement vérifiées dans la pratique industrielle
- Les stocks confèrent de la robustesse vis à vis des incertitudes et des perturbations
  - Les stocks de produits finis permettent de répondre rapidement à la demande (livraison sur stocks)
  - Les stocks de produits intermédiaires permettent limiter les répercussions des pannes (stocks de sécurité) et de réduire les délais de livraison sans trop augmenter les coûts (différentiation retardée)
  - Les stocks de matières ou de composants primaires permettent de faire face aux ruptures d'approvisionnement

Master SIS 2009-2010
Jean-Claude Hennet

Le cas mono produit – Le problème de Wagner-Whitin

- Les hypothèses
  - Le modèle s'applique à un produit fabriqué en interne ou à un produit commandé à un fournisseur externe
  - Le produit considéré a un lieu de stockage spécifique
  - La Séquence de demandes $\{d_k\}$ pour ce produit est connue sur l'horizon [0, T]
  - Pas de contraintes de capacité sur
    - la production ou l'approvisionnement
    - Les stocks
  - Le coût de production (ou d'approvisionnement) est linéaire par morceaux et concave. Il inclut le coût fixe (set-up cost) et le coût variable.
  - Par convention, on suppose un niveau de stock initial nul : $x_0 = 0$.

Le cas mono produit – Le problème de Wagner-Whitin

- Formulation mathématique :

Minimiser $J = \sum_{k=0}^{T} (c_k u_k + f_k \delta_k + h_k x_k)$

Sous $x_{k+1} = x_k + u_k - d_k$; $x_0 = 0$

Avec d_k demande (connue) livrée à la fin de la période k

f_k coût fixe de production du produit i à la période k

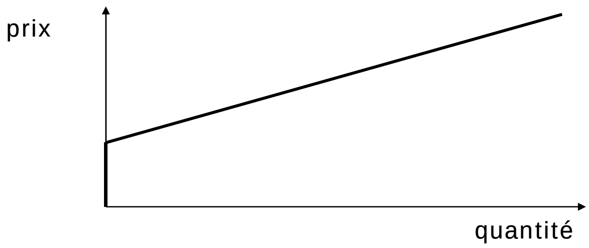
c_k coût variable de production par unité de produit i à la période k

δ_k Variable logique associée à la production à la période k $\delta_k = 0$ or 1

h_k, x_k coût unitaire de stockage et quantité stockée au début de la période k

Le cas mono produit – Le problème de Wagner-Whitin

- Concavité de la fonction de coût de production pour tout k



- Conséquence: le niveau de production optimal à la période k est:
  - Soit 0 si le stock est suffisant pour couvrir la demande de la période courante
  - Soit la somme de la demande de la période courante et de demandes futures si le stock est nul.

Rappel de programmation dynamique

- Définir la fonction de transition θ_k et la fonction « coût à venir »

$$\boxed{F_k(x_k)=Opt_{u_k}\left\{f_k(x_k,u_k)+F_{k+1}(\theta_k(x_k,u_k))\right\}}$$

1. Calculer pour toutes les valeurs possibles de x_T:

$$F_T(x_T)=Opt_{u_T}\left\{f_T(x_T,u_T)\right\}$$

2. Pour k=T-1,...,1, calculer en sens inverse, pour toutes les valeurs possibles de x_k $F_k(x_k)$ par la formule ci-dessus.

1. Calculer, pour toutes les valeurs possibles de x_0:

$$J^*(x_0)=F_0(x_0)=Opt_{u_0}\left\{f_0(x_0,u_0)+F_1(\theta_0(x_0,u_0))\right\}$$

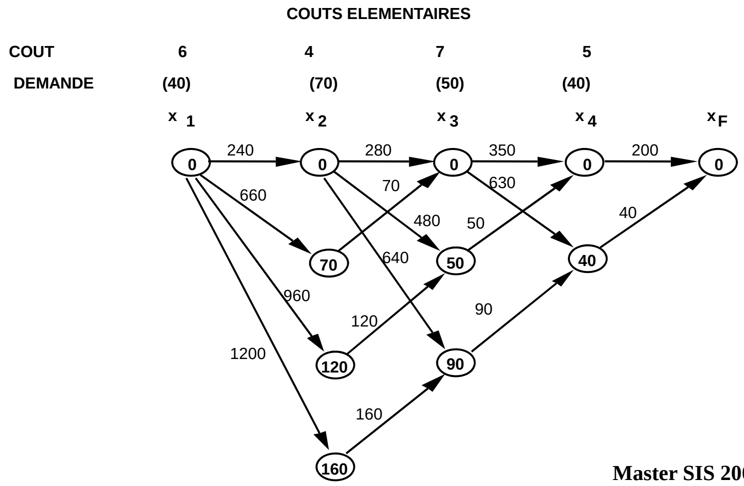
Problème de Wagner-Whitin – Un Exemple

- Une unité de production de meubles a les commandes suivantes sur les prochaines périodes:

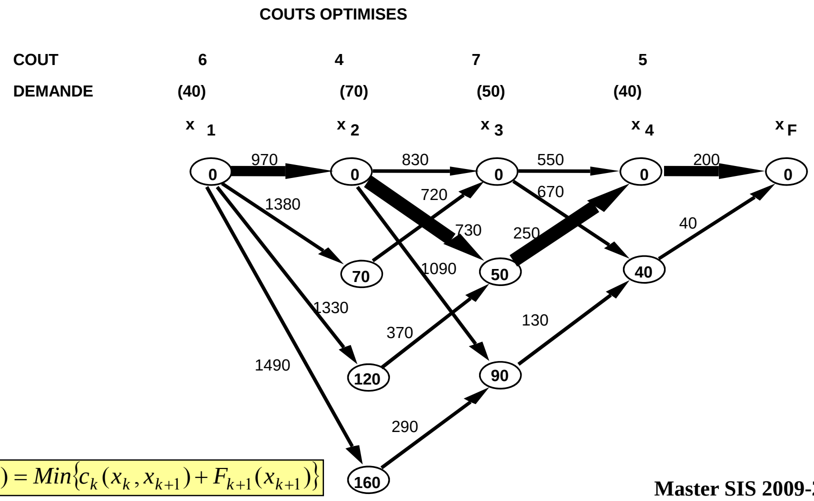
Période	Demande	Coût unitaire
1	40	6
2	70	4
3	50	7
4	40	5

- Le coût de stockage unitaire est de 1€ par période
- Trouver le plan de production optimal sans retard

Problème de Wagner-Whitin – Un Exemple



Problème de Wagner-Whitin – Un Exemple



$F_k(x_k) = Min\{c_k(x_k, x_{k+1}) + F_{k+1}(x_{k+1})\}$

La Quantité Economique Optimale

- Version simplifiée en temps continu du problème de Wagner-Whitin:

  Trouver u(t) qui minimise $J = \int_0^T (cu(t) + f\delta(t) + hx(t))dt$

  sous un taux de demande constant d, $\dot{x}(t) = u(t) - d$

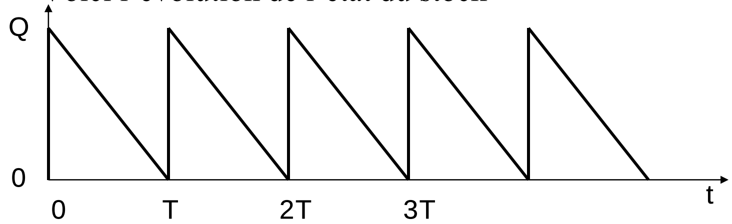
- Sous la condition d'optimalité, $x(t)u(t) = 0$

la solution optimale satisfait : $\boxed{u(t) = Q\delta(t - kT) \text{ avec } x(kT) = 0.}$

Q est appelé la Quantité Economique Optimale

La Quantité Economique Optimale

- Voici l'évolution de l'état du stock



- T=Q/d
- Coût sur la période T: $c_T = f + cQ + \frac{hTQ}{2}$

  Coût par unité de temps: $c_u = \frac{fd}{Q} + cd + \frac{hQ}{2}$
- $\frac{dc_u}{dt} = -\frac{fd}{Q^2} + \frac{h}{2} \Rightarrow \mathrm{Q}^* = \sqrt{\frac{2\mathrm{fd}}{\mathrm{h}}}$ (formule de Wilson)

La Quantité Economique Optimale – Un exemple

- Une compagnie achète 80000 emballages par an. Chacun vaut 0,40€. Le coût fixe de commande est de 80€. Le coût unitaire de stockage est de 0,1€/an. Un taux financier de 15% par an s'applique aux emballages stockés.
- Quel est le nombre optimal de commandes à passer par an?
- Quel est le nombre optimal d'emballages à commander?

Solution:

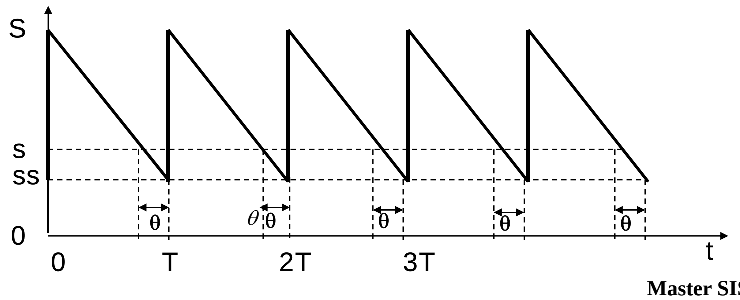
D=80000 ; h=0.1+0.4×0.15=0.6€ ; f=80 $\boxed{\mathrm{Q}^* = \sqrt{\frac{2\mathrm{fd}}{\mathrm{h}}} \cong 8944}$

On peut – passer une commande de 8944 unités dès que le stock est vide
– passer une commande de 9000 unités dès que le stock est vide
– ou passer par an 9 commandes de *round*(80000/9)=8889 unités

Les Politiques Dérivées de la Q.E.O.

- Politique du point de commande
  - Prise en compte
    - de la demande pendant le délai d'approvisionnement : $d^*\theta$
    - du stock de sécurité, $ss=k^*$*(écart-type de la demande pendant le délai d'approvisionnement)* (k est appelé « facteur de sécurité »)

$$\dot{x}(t) = u(t-\theta) - d(t) \quad \text{avec} \quad u(t) = (S - ss)\delta(t - kT)$$



La Politique du point de commande

- Calcul du stock de sécurité
  - On fixe un seuil à la probabilité de rupture de stock pendant un cycle: p_r
  - Soit θ le délai d'approvisionnement (supposé constant)
  - r est choisi tel que :

  Prob(demande pendant la durée $\theta \geq r$) $\leq p_r$

  - Soit une loi de probabilité pour la demande de moyenne m et de fonction de répartition F. r est défini par : $F_\theta(r) = 1-p_r$
  - On note alors : $r = F_\theta^{-1}(1-p_r)$

Les Politiques Dérivées de la Q.E.O.

- Politique à inspection continue (s,S)
  - Un ordre de fabrication (OF) ou d'approvisionnement (OA) est lancé quand le stock atteint l'état suivant : $s = ss + d^*\theta$

    où *ss* est le stock de sécurité, θ le délai d'approvisionnement (ou lead time ou temps de cycle)

  Le niveau de recomplètement, S, est calculée par la formule de Wilson.
- Politique à inspection périodique (T,Q)
  - Un ordre de fabrication (OF) ou d'approvisionnement (OA) est lancé aux instants t=0, T, 2T,...,kT.

  La quantité commandée vaut : $Q(x(t)) = s + D(t, t+T) - x(t)$.

Gestion de Stock avec Demande Aléatoire

- Le modèle à une seule période : modèle du «Newsvendor » - Les hypothèses
  - Demande aléatoire x

  Loi de probabilité de moyenne m et de fonction de répartition F :

  $F(y) = \text{Proba}(x \le y)$
  - Pas de coût fixe d'achat
  - Coût unitaire d'achat : c
  - Coût unitaire de stockage : h
  - Coût unitaire de rupture de stock : r.
  - Par hypothèse, $h<c<r$.
  - État initial du stock : y_0.

Gestion de Stock avec Demande Aléatoire

- Critère de coût à minimiser:

$$J = c(y - y_0) + E[h \max(y - x, 0)] + E[r \max(x - y, 0)]$$

- On peut supposer $y_0=0$ (terme constant dans le critère)

$$J = cy + h\int_0^y (y - x)dF(x) + r\int_y^\infty (x - y)dF(x)$$

$$= cy + hyF(y) - h\int_0^y x\,dF(x) - ry(1 - F(y)) + r(m - \int_0^y x\,dF(x))$$

$$= (c - r)y + (r + h)\int_0^y F(x)dx$$

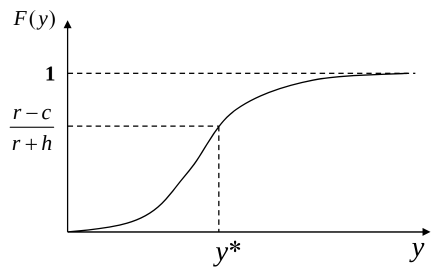
Gestion de Stock avec Demande Aléatoire

- Condition nécessaire d'optimalité:

$$\frac{\partial J}{\partial y} = c - r + (r + h)F(y) = 0.$$

D'où $F(y^*) = \dfrac{r - c}{r + h}$. C'est la « fraction critique ».

et $y^* = S^* = F^{-1}(\dfrac{r - c}{r + h})$.



Gestion de Stock avec Demande Aléatoire

- Extensions du modèle du « newsvendor »
  - Prise en compte de délais de fabrication ou d'approvisionnement
  - Cas multi-produit
  - Cas multi-étape
- Politique dynamique du stock de référence (basestock policy)

  Le niveau optimal S^* du stock doit être reconstitué
  - à chaque instant (commande d'approvisionnement synchronisée avec la commande client : modèle de type Kanban)
  - à chaque inspection périodique de l'inventaire (politique (T,Q))